Chapitre 11 : Dérivation

Table des matières

Contenu

- fonction dérivée ;
- fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3$;
- dérivée d'une somme, dérivée de $kf (k \in \mathbb{R})$, dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ;
- sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée ;
- tableau de variations, extremums.

Dans le dernier cours sur la dérivation, on a étudié la définition, l'interprétation et l'utilité que représentait le nombre dérivé d'une fonction en un point donné. On va étendre cette notion pour définir une fonction dérivée.

1 Fonction dérivée

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
On définit alors la fonction dérivée de f, noté f', qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

! Remarque

La dérivée f' de f définit donc bien une fonction, son ensemble de définition est appelé ensemble de dérivation de f.

On définit donc la fonction dérivée telle que $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Exemple:
On va chercher à déterminer la dérivée de la fonction $\forall x \in I, f(x) = x^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
Soit $x \in I$, on a $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$
Donc on a $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$.

En effectuant exactement le même processus de calcul, on peut déterminer des dérivées d'autres fonctions usuelles vues cette année.

Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
$f(x) = ax^3, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3ax^2$

Comme vu dans le dernier cours sur la dérivation, apprendre l'équation de la tangente par coeur n'est pas nécessaire tant que la méthode est comprise.

Ici il va être important de bien connaître les dérivées par coeur même si savoir la méthode de démonstration est intéressante elle peut-être très fastidieuse. (Dérivée de la fonction cube implique de faire un double développement).

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x$
- $g(x) = 2x^2$
- $h(x) = 7$
- $p(x) = x^3$

2 Opérations sur les dérivées

Propriétés:
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(ku)' = ku'$;

Exercice:
Déterminer la dérivée de la fonction f définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

3 Application à l'étude des variations d'une fonction

Propriétés fondamentales:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Soit $a \in I$, si $f'(a) = 0$ et f change de signe en a, alors a est un extremum de f (maximum ou minimum).

Exemple:
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f.
  On a $f'(x) = 4x + 8$
- On étudie le signe de cette dérivée.
  On a $f' < 0$ sur $]-\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $]-2; +\infty[$
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
  On a f strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$
- On trace le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f.
  On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x-3)$.
3. Etablir le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.