

# Chapitre 11 : Dérivation

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

# Table des matières

1. Fonction dérivée
2. Opérations sur les dérivées
3. Application à l'étude des variations d'une fonction
4. Exercice bilan

1. Fonction dérivée
2. Opérations sur les dérivées
3. Application à l'étude des variations d'une fonction
4. Exercice bilan

## Définition:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On définit la fonction dérivée de  $f$ , noté  $f'$ , qui à tout  $x \in I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$  de  $f$  en  $x$ .

## Remarque

La dérivée  $f'$  de  $f$  définit donc bien une fonction, son ensemble de définition est appelé ensemble de dérivation de  $f$ .

Exemple:

On va chercher à déterminer la dérivée de la fonction  $\forall x \in I, f(x) = x^2$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in I$ , on a  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$

Donc on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

# Fonction dérivée

En effectuant exactement le même processus de calcul, on peut déterminer des dérivées d'autres fonctions usuelles vues cette année.

<b>Fonction <math>f</math></b>	<b>Dérivée <math>f'</math></b>
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exercice:

Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x$

- $g(x) = 2x^2$

- $h(x) = 7$

- $p(x) = x^3$

# Opérations sur les dérivées

1. Fonction dérivée
2. Opérations sur les dérivées
3. Application à l'étude des variations d'une fonction
4. Exercice bilan

## Propriété:

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel :

- $(u + v)' = u' + v'$  ;
- $(ku)' = ku'$  ;

Exercice:

Déterminer la dérivée de la fonction  $f$  définie par pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

# Application à l'étude des variations d'une fonction

1. Fonction dérivée
2. Opérations sur les dérivées
3. Application à l'étude des variations d'une fonction
4. Exercice bilan

## Propriété fondamentale:

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$  ;
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) < 0$  ;
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  ;

# Application à l'étude des variations d'une fonction

## Exemple:

On cherche à étudier les variations de la fonction  $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- On commence par déterminer la dérivée de  $f$ .  
On a  $f'(x) = 4x + 8$ .
- On étudie le signe de cette dérivée.  
On a  $f' < 0$  sur  $] -\infty; -2[$  et  $f' > 0$  sur  $] -2; +\infty[$ .
- On en déduit les variations de  $f$  par la propriété fondamentale.  
On a  $f$  strictement décroissante sur  $] -\infty; -2[$  et strictement croissante sur  $] -2; +\infty[$ .

# Application à l'étude des variations d'une fonction

- On trace le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(-2)$	$+\infty$

The table illustrates the variation of the function  $f$ . The first row shows the domain  $x$  with markers at  $-\infty$ ,  $-2$ , and  $+\infty$ . The second row shows the derivative  $f'(x)$ , which is negative ( $-$ ) for  $x < -2$ , zero ( $0$ ) at  $x = -2$ , and positive ( $+$ ) for  $x > -2$ . The third row shows the function  $f(x)$ , which decreases from  $+\infty$  at  $-\infty$  to a minimum value  $f(-2)$  at  $x = -2$ , and then increases back to  $+\infty$  at  $+\infty$ . Arrows indicate the direction of the function's values between the markers.

- On cherche les extremums de la fonction  $f$ .  
On a que  $f'$  ne s'annule que en  $-2$  et change de signe donc  $f$  atteint son minimum en  $-2$  qui vaut  $f(-2)$ .

1. Fonction dérivée
2. Opérations sur les dérivées
3. Application à l'étude des variations d'une fonction
4. Exercice bilan

Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ .

1. Déterminer l'expression de  $f'(x)$ .
2. Montrer que  $f'(x) = (x - 1)(x - 3)$ .
3. Etablir le tableau de signe de  $f'$  puis le tableau de variation de  $f$ .