Chapitre 12 : Variables aléatoires

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacuns leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 5, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable X qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur de possible de cette somme a une probabilité qui lui est associé. (probabilité de faire 2, 3, 4, ...)

On convient de dire que X est une variable aléatoire.

Définition:

Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

Exemple:

Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :

  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

Définition:

- On note $E = \{x_1, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
- On note $\{X = x_i\}$ l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel x_i

Exemple :
En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :

$$\{X = 8\} \longleftrightarrow \text{"La somme des deux dés est égale à 8"}.$$

Exercice:

On considère un sac contenant cinqs billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro et une bleue gagner 4 euros.
On définit alors la variable aléatoire X qui associe les valeurs du gain.

1. Déterminer l'univers Ω.
2. Déterminer l'ensemble E des valeurs prises par X.

Loi de probabilité et espérance

Définition:

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction $\mathbb{P}$ qui a chaque valeur associe sa probabilité.

Remarque

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées.

Dans tout le reste du chapitre, on considèrera la variable aléatoire discrète de loi :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Loi de probabilité et espérance

Exemple:

En reprenant l'exemple précédent des billes, on a $E = \{-10, 1, 4\}$ et :

$$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5} \; ; \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5} \; ; \qquad \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5} \; ;$$

En représentant ces données dans un tableau on a :

x	-10	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Loi de probabilité et espérance

Exercice:

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi, X vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Loi de probabilité et espérance

Définition:

Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $E = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité.
On définit l'espérance de la variable aléatoire X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + ... + x_n \mathbb{P}(X = x_n)$$

Remarque

L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple:

En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient:

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \mathbb{P}(X = -10) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) = -10 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = 0$$

Loi de Bernoulli

Définition:

Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée "succès" qui a pour probabilité p, l'autre appelée "échec" qui a pour probabilité $q = 1 - p$.
Définir une **loi de Bernoulli de paramètre** p, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple:
Si on lance un dé et qu'on nomme "succès" l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Définition:

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a l'espérance de x qui est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Exemple:

Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a : $\mathbb{E}(X) = 0,5$

Exercice bilan

Un joueur lance deux fois de suite une pièce truquée qui a 60% de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de Face obtenu sur deux lancers.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Etablir la loi de probabilité de X.
5. Décrire l'événement $\{X < 2\}$ puis calculer sa probabilité.
6. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.