Chapitre 5 : Fonctions polynomiales de degré 2

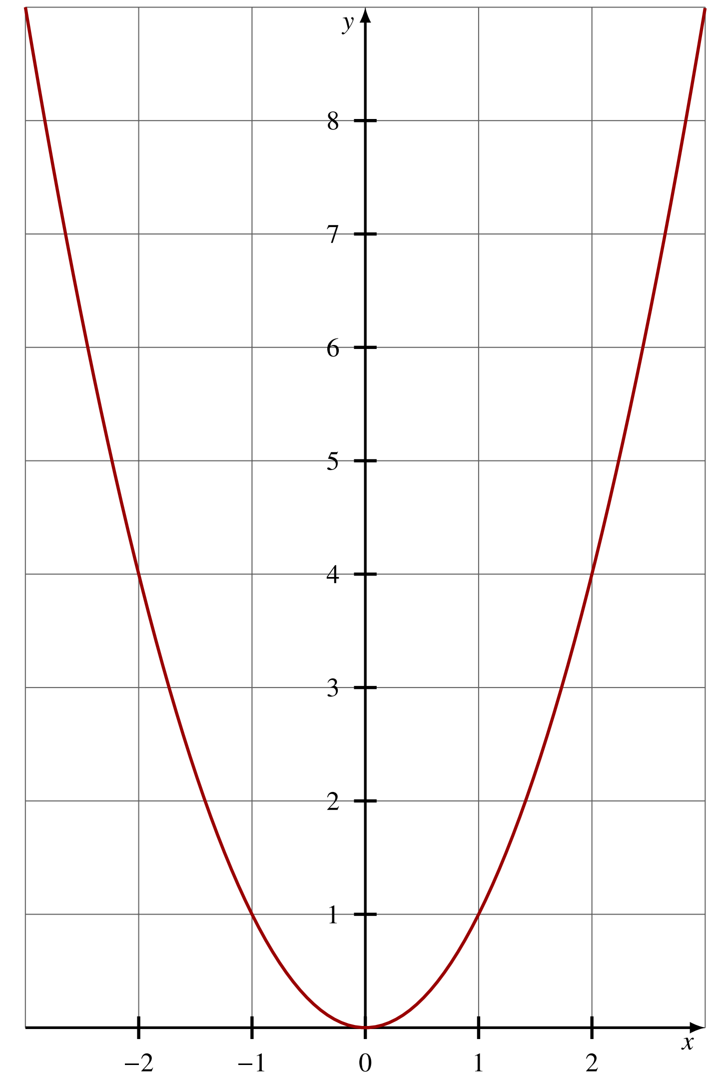
Table des matières

Contenu

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Axes de symétrie.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).

1 Rappels et définitions

On connaît bien la fonction carré étudié en classe de seconde : $x \mapsto x^2$



On peut déterminer son tableau de signe et son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On peut étendre cette définition à des cas plus généraux.

Définition:
On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où $a \neq 0$.

Exemple:

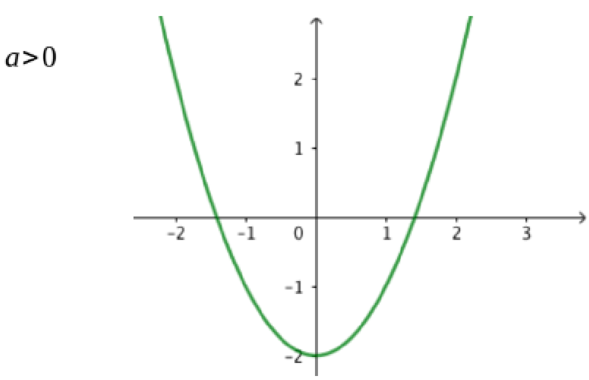
- Les fonctions suivantes sont des polynômes de degré 2 :
  - $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
  - $g(x) = 3 - 2x^2$
  - $h(x) = (x - 4)(x + 3)$
- Les fonctions suivantes ne le sont pas :
  - $F(x) = 6x - 1$
  - $G(x) = x^4 + x^2 + 1$

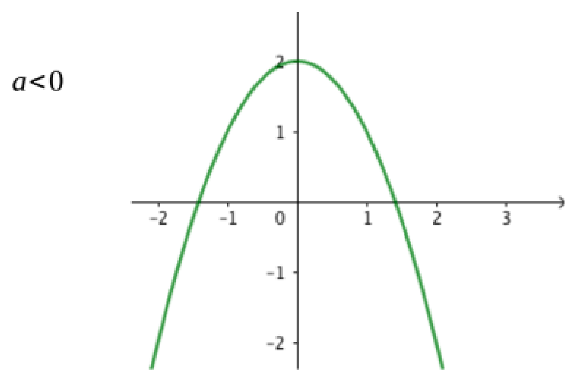
2 Représentation graphique

La représentation graphique d'un polynôme du 2nd degré est appelée une parabole.

Propriété:
Soit f un polynôme du 2nd degré de la forme $f : x \mapsto ax^2 + b$.

- Si $a > 0$ f est d'abord décroissante puis croissante (forme de "sourire").
- Si $a < 0$ f est d'abord croissante puis décroissante (forme de "grimace").





Sans savoir sa valeur, le signe de a donne une information cruciale sur la forme de la représentation graphique de la fonction.

3 Forme factorisée d'un polynôme du 2nd degré

3.1 Définition

Rappels:
On dit qu'une expression algébrique est...

- ... développée si son opération principale est une addition ou une soustraction.
- ... factorisée si son opération principale est une multiplication ou une division.

Exemple:
L'expression $x^2 - x - 2$ est développée et l'expression $(x + 1)(x - 2)$ est factorisée.
Ces deux expressions sont égales.

Définition:
Soit f un polynôme du 2nd degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (possiblement égales) x_1 et x_2 appelées racines de f.

Remarque

Les fonctions de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont bien des polynômes du 2nd degré.

Propriété:
Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. La courbe représentative de f admet :

- un axe de symétrie d'axe $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
- un sommet $S(x_M; f(x_M))$ où $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Exemple :

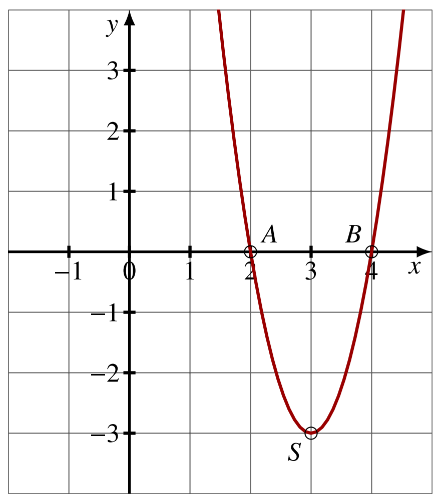
Soit $f(x) = 3(x-2)(x-4)$. En résolvant l'équation $f(x) = 0$, on trouve les racines :

$$x_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = 4$$

On a donc :

- $x_M = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
- $f(x_M) = 3 \times (3 - 2) \times (3 - 4) = -3$.

C'est-à-dire que la courbe représentative de f passe par les points $A(2; 0)$, $B(4; 0)$ et $S(3; -3)$.



3.2 Factorisation

Définition:
Soit f un polynôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si f admet deux racines x_1 et x_2, alors sa forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple :
Soit $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$. On vérifie que -4 et 3 sont racines de f. sa forme factorisée est donc :

$$f(x) = 2(x - (-4))(x - 3) = 2(x + 4)(x - 3)$$

Exercice :
Factoriser $g(x) = 2x^2 + 10x - 12$ sachant que ses racines sont 1 et -6.

Définition:
Si on ne connaît qu'une seule racine x_1 de f, alors f se factorise par $x - x_1$.

Exercice:
On considère la fonction du 2nd degré $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

1. Conjecturer une racine de f.
2. Factoriser f.

3.3 Etude du signe

Définition:
Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le signe de f peut être déterminé :

- Graphiquement : On étudie la position de la courbe par rapprot à l'axe des abscisses.
- Algébriquement : On effectue on tableau de signe.

Remarque

On utilisera constamment la forme factorisée d'un polynôme pour étudier son signe.

Exercice:
Etudier le signe de la fonction $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$.

4 Equations de la forme $x^2 = c$

Propriété:
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c.

- Si $c > 0$, alors l'équation a deux solutions $-\sqrt{c}$ et $\sqrt{c}$.
- Si $c = 0$, alors l'équation a une seule solution 0.
- Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Exercice:
Quelles sont les solutions des équations suivantes ?

1. $x^2 = 16$
2. $x^2 = -8$
3. $2x^2 - 8 = 120$

5 Exercice bilan

On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 12x - 32$.

1. Montrer que 2 est racine de f.
2. En déduire une forme factorisée de f.
3. Donner les coordonnées du sommet de la courbe représentative de f.
4. Etablir le tableau signe de f.