

Chapitre 5 : Fonctions polynômiales de degré 2

Axel Carpentier

Première technologique :

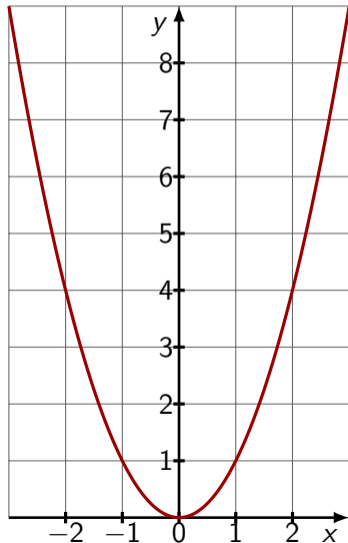
Tronc commun

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Rappels et définitions

On connaît bien la fonction carré étudié en classe de seconde : $x \mapsto x^2$



Rappels et définitions

On peut déterminer son tableau de signe et son tableau de variation sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$		0	

Définition:

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur \mathbb{R} de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où $a \neq 0$.

Exemple:

- Les fonctions suivantes sont des polynômes de degré 2 :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

- $g(x) = 3 - 2x^2$

- $h(x) = (x - 4)(x + 3)$

- Les fonctions suivantes ne le sont pas :

- $F(x) = 6x - 1$

- $G(x) = x^4 + x^2 + 1$

Représentation graphique

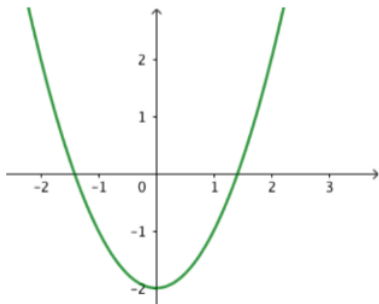
1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Propriété:

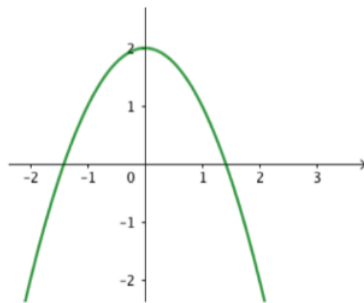
Soit f un polynôme du 2nd degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$ f est d'abord décroissante puis croissante (forme de "sourire").
- Si $a < 0$ f est d'abord croissante puis décroissante (forme de "grimace").

$a > 0$



$a < 0$



Forme factorisée d'un polynôme de degré 2

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Forme factorisée d'un polynôme de degré 2

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Rappels:

On dit qu'une expression algébrique est...

- ... développée si son opération principale est une addition ou une soustraction.
- ... factorisée si son opération principale est une multiplication ou une division.

Exemple:

L'expression $x^2 - x - 2$ est développée et l'expression $(x + 1)(x - 2)$ est factorisée.
Ces deux expressions sont égales.

Définition:

Soit f un polynôme du 2nd degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (possiblement égales) x_1 et x_2 appelées racines de f .

Remarque

Les fonctions de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont bien des polynômes du 2nd degré.

Propriété:

Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. La courbe représentative de f admet :

- un axe de symétrie d'axe $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- un sommet $S(x_M; f(x_M))$ où $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Définition

Exemple :

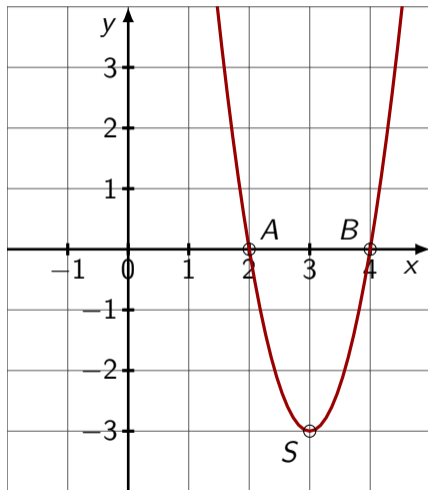
Soit $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$. En résolvant l'équation $f(x) = 0$, on trouve les racines :

$$x_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = 4$$

On a donc :

- $x_M = \frac{2 + 4}{2} = 3$.
- $f(x_M) = 3 \times (3 - 2) \times (3 - 4) = -3$.

C'est-à-dire que la courbe représentative de f passe par les points $A(2; 0)$, $B(4; 0)$ et $S(3; -3)$.



Forme factorisée d'un polynôme de degré 2

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Définition:

Soit f un polynôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors sa forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple :

Soit $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$. On vérifie que -4 et 3 sont racines de f . sa forme factorisée est donc :

$$f(x) = 2(x - (-4))(x - 3) = 2(x + 4)(x - 3)$$

Exercice :

Factoriser $g(x) = 2x^2 + 10x - 12$ sachant que ses racines sont 1 et -6 .

Définition:

Si on ne connaît qu'une seule racine x_1 de f , alors f se factorise par $x - x_1$.

Exercice:

On considère la fonction du 2nd degré $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

1. Conjecturer une racine de f .
2. Factoriser f .

Forme factorisée d'un polynôme de degré 2

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Définition:

Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le signe de f peut être déterminé :

- Graphiquement : On étudie la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.
- Algébriquement : On effectue un tableau de signe.

Remarque

On utilisera constamment la forme factorisée d'un polynôme pour étudier son signe.

Exercice:

Etudier le signe de la fonction $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$.

Equations de la forme $x^2 = c$

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

Equations de la forme $x^2 = c$

Propriété:

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c .

- Si $c > 0$, alors l'équation a deux solutions $-\sqrt{c}$ et \sqrt{c} .
- Si $c = 0$, alors l'équation a une seule solution 0.
- Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Exercice:

Quelles sont les solutions des équations suivantes ?

1. $x^2 = 16$

2. $x^2 = -8$

3. $2x^2 - 8 = 120$

1. Rappels et définitions
2. Représentation graphique
3. Forme factorisée d'un polynôme de degré 2
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Factorisation
 - 3.3 Etude du signe
4. Equations de la forme $x^2 = c$
5. Exercice bilan

On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 12x - 32$.

1. Montrer que 2 est racine de f .
2. En déduire une forme factorisée de f .
3. Donner les coordonnées du sommet de la courbe représentative de f .
4. Etablir le tableau signe de f .