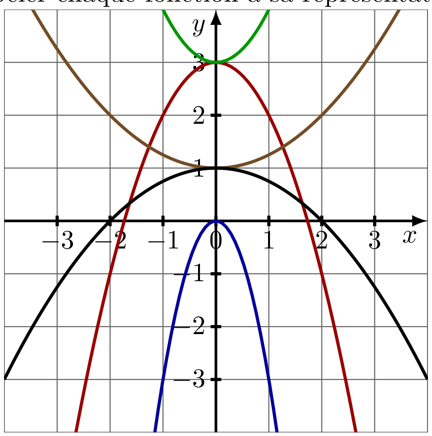
1 Fonctions polynômiales de degré 2

1.1 Compétences Attendues

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$
- Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto a(x - x1)(x - x2)$
- Racines d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée
- Signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée

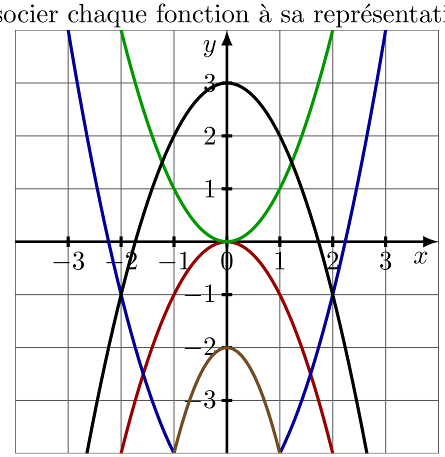
1.2 Exercices

Exercice 1:
Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



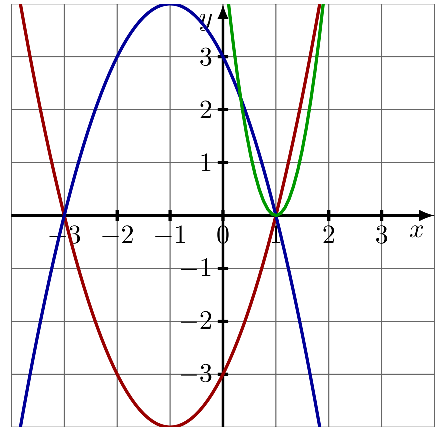
1. $f(x) = -x^2 + 3$
2. $g(x) = -3x^2$
3. $h(x) = x^2 + 3$
4. $p(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$
5. $q(x) = -\dfrac{x^2}{4} + 1$

Exercice 2:
Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



1. $f(x) = -x^2$
2. $g(x) = x^2 - 5$
3. $h(x) = x^2$
4. $p(x) = -2x^2 - 2$
5. $q(x) = -x^2 + 3$

Exercice 3:
Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



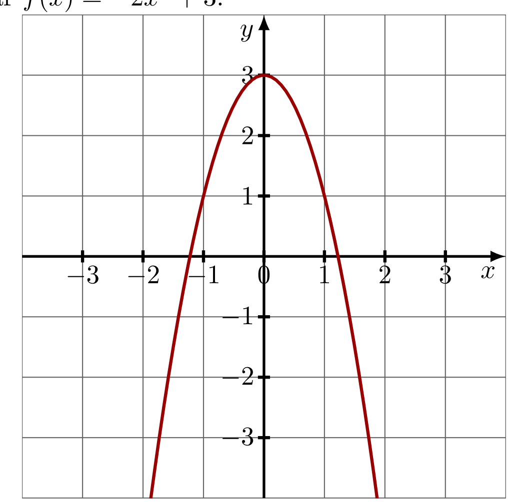
1. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
2. $g(x) = -(x - 1)(x + 3)$
3. $h(x) = 5(x - 1)^2$

Exercice 4:
La parabole $\mathcal{P}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$. Déterminer, dans chacun des cas suivants, la constante a pour que $\mathcal{P}$ passe par le point A.

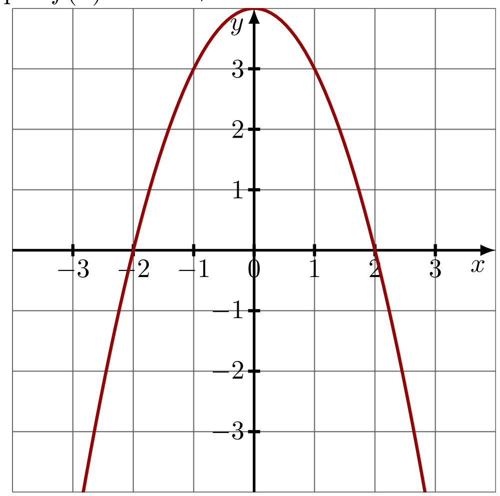
1. $A(2; 3,5)$
2. $A(-4; 8)$
3. $A(-4; -2)$

Exercice 5:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$.

1. Construire son tableau de variation.
2. Calculer algébriquement l'image de -2 ; 1 et -4.
3. Déterminer algébriquement le ou les antécédents de -13 ; 3 et 4.
4. On donne sa courbe représentative sur la figure suivante. Lire graphiquement l'image de -1 et 0 puis lire le ou les antécédents de -3 et 1.



Exercice 6:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.



1. Vérifier que f peut aussi s'écrire $f(x) = -(x-2)(x+2)$.
2. Construire son tableau de variation.
3. Calculer algébriquement l'image de 1 ; 0 et -4.
4. Déterminer algébriquement le ou les antécédents de 0 ; 8 et 4.
5. Vérifier, lorsque c'est possible, vos résultats graphiquement avec la courbe ci-contre.

Exercice 7:
Parmi les nombres réels 1, -2, $-\dfrac{1}{2}$, 2 et $\dfrac{2}{3}$, lesquels sont racines de la fonction $f(x) = -6x^2 + x + 2$?

Exercice 8:
Soit $f(x) = x^2 + 4x - 1$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = -1$.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de f.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 9:
Soit $g(t) = 2t^2 - t - 4$.

1. Résoudre l'équation $g(t) = -4$.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de g.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentative de g.
4. Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 10:
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-3)(x+2)$

1. Déterminer la forme développée de f.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -24$.
4. Déterminer
   (a) L'intersection de la courbe f avec l'axe des abscisses.
   (b) Son axe de symétrie.
   (c) Les coordonnées de son extremum.
5. Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction f.

Exercice 11:
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2(x+4)(x-2)$.

1. Déterminer la forme développée de g.
2. Déterminer les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation $g(x) = 16$.
4. Déterminer
   (a) L'intersection de la courbe g avec l'axe des abscisses.
   (b) Son axe de symétrie.
   (c) Les coordonnées de son extremum.
5. Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction g.

Exercice 12:
Factoriser les polynômes du second degré dont on donne deux racines :

1. $f(x) = x^2 + x - 42$
   Racines : -7 et 6.
2. $g(x) = 4x^2 + 3x - 1$
   Racines : -1 et $\dfrac{1}{4}$.
3. $h(x) = 2x^2 - x - 1$
   Racines : $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

Exercice 13:

1. Factoriser $A(x) = 3x^2 - 19x + 6$ sachant qu'elle a pour racines $\dfrac{1}{3}$ et 6.
2. Factoriser $B(x) = x^2 + 2x - 15$ sachant qu'une racine est 3.

Exercice 14:
Soit $P(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Vérifier que 1 est une racine de P, en déduire l'autre racine de P puis factoriser P.

Exercice 15:
Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que la valeur α proposée est une racine du polynôme puis factoriser ce dernier.

1. $\alpha = 1$ et $f(x) = x^2 - 1$.
2. $\alpha = 3$ et $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$.
3. $\alpha = 2$ et $f(x) = -3x^2 + 12x - 12$

Exercice 16:

1. Etudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-3)(x+2)$.
2. Etudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -(x-5)(x+\dfrac{1}{2})$.

Exercice 17:
Résoudre les inéquations du second degré suivantes :

1. $2(x-8)(x+9) \geq 0$
2. $(x-7)(x+5) < 0$

Exercice 18:
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 3$
2. $x^2 + 5 = 30$
3. $3x^2 = 102$
4. $(x+5)^2 = 144$
5. $(3x+1)^2 - 4 = 77$

Exercice 19:
Une entreprise produit et commercialise entre 2 et 17 tonnes d'engrais par jour.
Le bénéfice total, exprimé en centaines d'euros, réalisé pour la production de x tonnes d'engrais est modélisé à l'aide de la fonction B définie pour tout $x \in [2; 17]$, par :

$$B(x) = -x^2 + 20x - 64$$

1. Calculer le bénéfice réalisé lorsque l'entreprise produit et vend 10 tonnes d'engrais.
2. (a) Vérifier que 4 est une racine du polynôme $B(x)$.
   (b) En déduire l'autre racine de $B(x)$.
   (c) Factoriser $B(x)$.
3. (a) Résoudre l'inéquation $B(x) > 0$.
   (b) En déduire la quantité d'engrais, exprimée en tonnes, que l'entreprise doit produire et vendre pour faire un bénéfice.

Exercice 20:
Un groupe d'élèves réalise et vend un journal. Les coûts d'impression, exprimés en euros, de x journaux sont donnés par :

$$C(x) = 0,005x^2 - 0,5x + 49,5 \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 400$$

En vendant x journaux, les revenus, exprimés en euros, sont donnés par :

$$R(x) = 1,3x$$

1. Montrer que :
$$R(x) > C(x) \iff -0.005x^2 + 1,8x - 49,5 > 0$$
2. Vérifier que 30 est racine du polynôme $-0,005x^2 + 1,8x - 49,5$ puis le factoriser.
3. Déterminer pour quels volumes de vente les élèves réalisent un bénéfice.

Exercice 21:
Une micro-entreprise fabrique des ventilateurs vintage. Le PDG estime que la production pour le mois à venir doit être comprise entre 1 500 et 3 000. On s'intéresse au volume de production qui maximise le profit de l'entreprise. On modélise ce profit, exprimé en centaines d'euros, par la fonction :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400$$

où $x \in [15; 30]$ représente le nombre de ventilateurs produits en centaine.

1. Vérifier que 5 et 50 sont racines de f.
2. En déduire la forme factorisée de f.
3. Déterminer le signe de la fonction f sur $[15; 30]$.
4. Déterminer la valeur pour laquelle f atteint son extremum.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction.

Exercice 22:
Après administration d'un antibiotique, la population d'une bactérie, exprimée en dizaine de milliers, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(t) = -0,9t^2 + 1,53t + 3,51$$

où t désigne le temps en heures.
On administre l'antibiotique à l'instant $t = 0$.

1. Quel est le nombre de bactéries à l'instant où l'ont administre l'antibiotique ?
2. Calculer $f(3)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer que $f(t) = -0,9(t-3)(t+1,3)$.
4. (a) Déterminer au bout de combien de temps, après l'administration de l'antibiotique, le nombre de bactéries est maximal.
   (b) Quel est alors le nombre maximal de bactéries ?
5. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;3]$.

Exercice 23:
Suite à l'installation d'une nouvelle antenne relais dans leur ville, les habitants d'un quartier, résidant à une distance comprise entre 70 mètres et 160 mètres de cette antenne, ont fait procéder à des mesures du champ électrique généré.

La norme de ce champ mesurée en un point, en fonction de la distance x de ce point à l'antenne, est donnée par la formule :

$$E(x) = -0,25x^2 + 60x - 2775$$

Les associations de riverains recommandent une exposition inférieure à 600 mV/m.

1. Calculer $E(90)$.
2. Déterminer les distances pour lesquelles ce seuil est respecté.

Exercice 24:
Mathéo fait du camping sauvage. Il installe sa tente de douche solaire. Afin d'avoir plus de place en hauteur, il pose les deuxarceaux de façon qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.
On modélise un arceau par la représentation graphique de la fonction A telle que :

$$A(x) = -1,85(x-1)(x-2,76)$$

Sachant qu'il mesure 1m85, Mathéo pourra-t-il se tenir debout dans la tente ?

Exercice 25:
Le plus grand observatoire astronomique du monde se trouve dans le désert chilien d'Atacama. On y trouve un radiotéléscope composé d'une soixantaine de paraboles blanches de 7 à 12 mètres de diamètre.

On pourrait modéliser la coupe verticale des plus grandes antennes, qui ont un diamètre de 12 mètres, par la fonction P polynôme de degré 2 telle que :

$$P(x) = \frac{1}{8}(x-6)(x+6)$$

1. Quelle serait alors leur profondeur ?
2. Sachant que ces paraboles s'enfoncent de 1 mètre dans leur socle cylindrique, quel doit être le diamètre de ce cylindre.

Exercice 26:
Un viticulteur vend son vin 100 euros l'hectolitre. Le coût en euros de produit de q hectolitre est :

$$C(q) = 0,1q^2 + 50q + 4000$$

1. Déterminer le bénéfice, $B(q)$, réalisé pour la production et la vente de q hectolitre de vin.
2. Calculer $B(400)$ et en déduire une forme factorisée de $B(q)$.
3. Quelles doivent être les quantités vendues et produites pour réaliser un profit ?