

Chapitre 3 : Produit scalaire

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Rappels sur les vecteurs
2. Définitions et caractérisations
 - 2.1 Aspect trigonométrique
 - 2.2 Aspect projectif
 - 2.3 Aspect analytique
3. Théorème d'Al-Kashi
4. Exercice bilan

Rappels sur les vecteurs

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

- 2.1 Aspect trigonométrique
- 2.2 Aspect projectif
- 2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Définition :

On appelle vecteur $\vec{u}$ associé à une translation, un segment orienté caractérisé par:

- Sa direction (orientation de la droite).
- Son sens (direction de la flèche).
- Sa norme (longueur du segment noté $||\vec{u}||$).

Propriété : *Relation de Chasles*

Soient A, B et C trois points quelconques du plan, on a la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Rappels sur les vecteurs

Propriété :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ = point d'arrivée - point de départ

Propriété :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

La norme du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définitions et caractérisations

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

2.1 Aspect trigonométrique

2.2 Aspect projectif

2.3 Aspect analytique

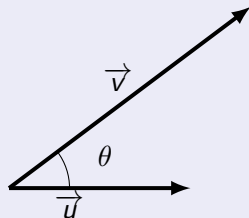
3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Définition/Propriété:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire le nombre réel,
noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$



Exemple:

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

Définition/Propriété:

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:

Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 2 \times 5 = 10 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -AD \times CB = -6 \times 3 = -18$$

Propriété:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k , on a :

-

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

-

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

-

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Remarque

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Définition:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice:

On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O . Les points I , J , K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Calculer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AK}$

- $\vec{AB} \cdot \vec{OD}$

- $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$

- $\vec{AD} \cdot \vec{OI}$

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

2.1 Aspect trigonométrique

2.2 Aspect projectif

2.3 Aspect analytique

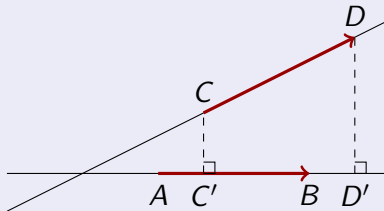
3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Propriété:

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs et C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

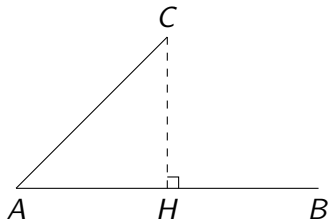


Aspect projectif

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB) .

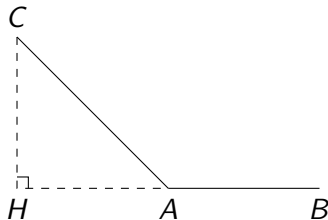
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

2.1 Aspect trigonométrique

2.2 Aspect projectif

2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice:

Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Théorème d'Al-Kashi

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

2.1 Aspect trigonométrique

2.2 Aspect projectif

2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

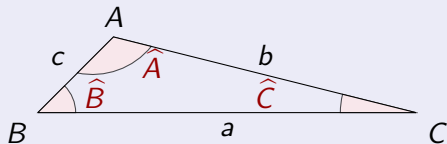
Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque.

On note :

$$\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$$



Alors :

$$\begin{cases} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Théorème D'Al-Kashi

Exemple :

Dans un triangle KLM , on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$$

A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.

Exercice :

Dans un triangle ABC , on a $AB = 6$, $BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Déterminer AC .

Exercice bilan

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations

2.1 Aspect trigonométrique

2.2 Aspect projectif

2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4.

Calculer :

1.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

1.2 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

2. Déterminer la valeur de m tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.