

Chapitre 2 : Configurations géométriques

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

- 2.1 Outils élémentaires
 - Théorème de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Trigonométrie
- 2.2 Outils avancés
 - Loi des sinus
 - Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

1. Périmètres aires et volumes

1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Trigonométrie

2.2 Outils avancés

Loi des sinus

Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

3.1 Repérage d'un point dans le plan

3.2 Repérage d'un point dans l'espace

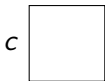
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Triangle:**



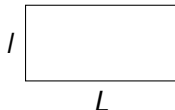
- Périmètre : $\mathcal{P}_{triangle} =$ somme des longueurs
- Aire : $\mathcal{A}_{triangle} = \frac{\text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}}{2}$

- **Carré:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{carré} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{carré} = c^2$

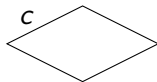
- **Rectangle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{rectangle} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l$

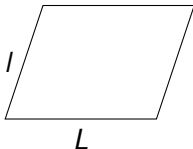
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Losange:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{\text{losange}} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{\text{losange}} = \frac{\text{Grande diagonale} \times \text{Petite diagonale}}{2}$

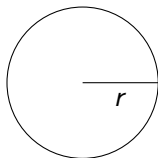
- **Parallélogramme:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{\text{parallélogramme}} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}$

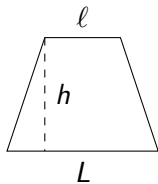
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Cercle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{\text{cercle}} = 2 \times \pi \times r$
- Aire : $\mathcal{A}_{\text{cercle}} = \pi \times r^2$

- **Trapèze:**



- Périmètre :
 $\mathcal{P}_{\text{trapèze}} = \text{somme des longueurs}$
- Aire : $\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(\ell + L) \times h}{2}$

Périmètres aires et volumes

1. Périmètres aires et volumes

1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Trigonométrie

2.2 Outils avancés

Loi des sinus

Théorème d'Al-Kashi

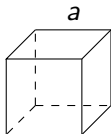
3. Repérage

3.1 Repérage d'un point dans le plan

3.2 Repérage d'un point dans l'espace

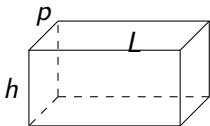
Formules usuelles de calcul de volumes

- **Cube:**



- Volume : $\mathcal{V}_{cube} = a^3$

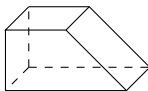
- **Pavé droit:**



- Volume : $\mathcal{V}_{pavé} = L \times h \times p$

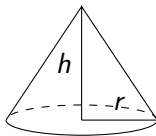
Formules usuelles de calcul de volumes

- **Prisme droit:**



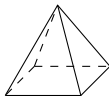
- Volume :
$$\mathcal{V}_{prisme} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

- **Cône:**



- Volume : $\mathcal{V}_{cône} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

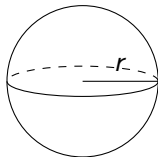
- **Pyramide:**



- Volume :
$$\mathcal{V}_{pyramide} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

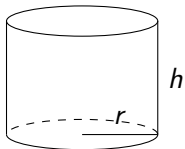
Formules usuelles de calcul de volumes

- **Boule:**



- Volume : $\mathcal{V}_{boule} = \frac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

- **Cylindre:**



- Volume : $\mathcal{V}_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$

Formules usuelles de calcul de volume

Exercice:

1. Calculer l'aire d'un cercle de rayon 5 cm.
2. Calculer le volume d'une boule de rayon 3 cm.
3. Calculer le volume d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 4 cm.

Géométrie du triangle

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Trigonométrie

2.2 Outils avancés

Loi des sinus

Théorème d'Al-Kashi

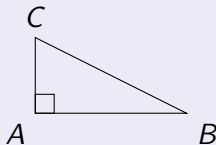
3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Sens direct:** Dans un triangle ABC rectangle en A comme suit : On considère un triangle rectangle en A :

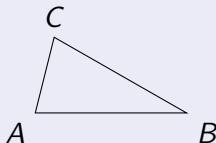


On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Contraposée:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :

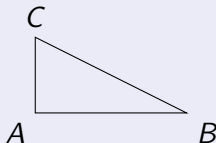


Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Réciproque:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :



Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en A .

Théorème de Pythagore

Exercice:

1. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AC = 5$ et $AB = 2$. Calculer BC .
2. Le triangle ABC tel que $AC = 7$, $AB = 6$ et $BC = 3$ est-il rectangle ? Si oui, en quel point ?

Géométrie du triangle

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Trigonométrie

2.2 Outils avancés

Loi des sinus

Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

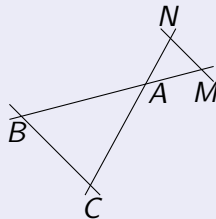
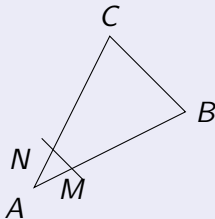
- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Théorème de Thalès

Théorème:

- **Sens direct:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si $(MN) \parallel (BC)$, alors :

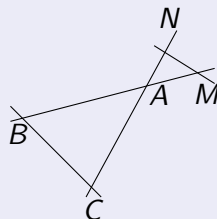
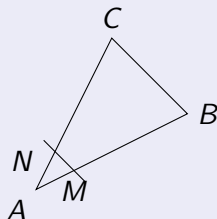
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Théorème de Thalès

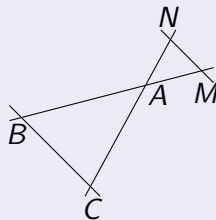
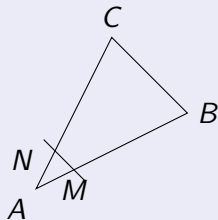
Théorème:

- **Contraposée:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si les deux premiers quotients de l'égalité ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



Théorème

- **Réciproque:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si les deux premiers quotients de l'égalité sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Théorème de Thalès

Exercice:

1. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A . On suppose que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AM = 4$, $AN = 3$, $AB = 1$ et $BC = 5$. Calculer les longueurs AC et MN .
2. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A . On suppose que $MN = 3$, $AB = 12$, $BC = 6$, $AB = 4$. Les droites (BM) et (CN) sont-elles parallèles ?

Géométrie du triangle

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

Théorème de Pythagore

Théorème de Thalès

Trigonométrie

2.2 Outils avancés

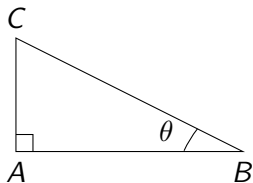
Loi des sinus

Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Dans un triangle rectangle, les trois relations trigonométriques relient les cosinus, sinus et tangente d'un angle du triangle, aux côtés du triangle.



- $\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB}$

Exercice:

Soit un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

1. Déterminer la valeur exacte puis approchée à 10^{-1° de l'angle $\theta = \widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur exacte puis approchée à 10^{-1} de BC .

Géométrie du triangle

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

- 2.1 Outils élémentaires
 - Théorème de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Trigonométrie
- 2.2 Outils avancés
 - Loi des sinus
 - Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

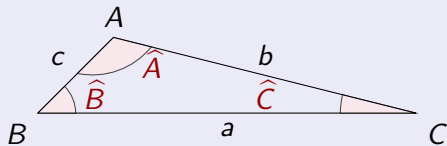
- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque.

On note :

$$\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$$



On a alors :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Exercice:

Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{C} = 50^\circ$.

Calculer $\hat{A}$ à 10^{-2° près.

Géométrie du triangle

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

- 2.1 Outils élémentaires
 - Théorème de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Trigonométrie
- 2.2 Outils avancés
 - Loi des sinus
 - Théorème d'Al-Kashi

3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

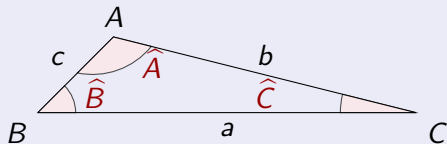
Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque.

On note :

$$\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$$



Alors :

$$\begin{cases} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Théorème d'Al-Kashi

Exercice:

Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{A} = 113,63^\circ$.

1. Montrer que $AB \simeq 11,08$
2. En déduire la valeur approchée à 10^{-2° près de la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$.

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

- 2.1 Outils élémentaires
 - Théorème de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Trigonométrie
- 2.2 Outils avancés
 - Loi des sinus
 - Théorème d'Al-Kashi

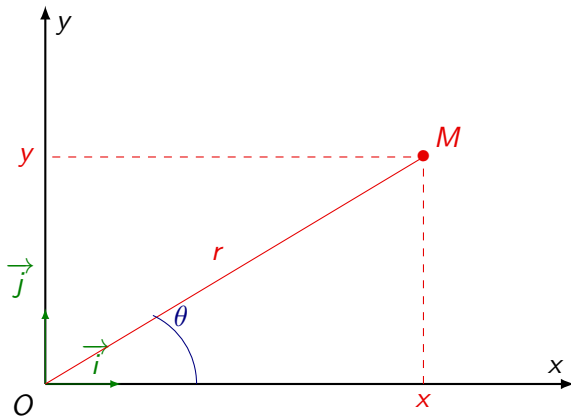
3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Repérage d'un point dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$.
- **Les coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{i} ; \overrightarrow{OM})$



Repérage d'un point dans le plan

Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y)$, on peut déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées polaires d'un point $(r; \theta)$, on peut déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.

Exercice:

1. On considère le point $A(3; 3)$ dans le plan. Déterminer ses coordonnées polaires $(r_A; \theta_A)$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $C\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$.

1. Périmètres aires et volumes

- 1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires
- 1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

2. Géométrie du triangle

- 2.1 Outils élémentaires
 - Théorème de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Trigonométrie
- 2.2 Outils avancés
 - Loi des sinus
 - Théorème d'Al-Kashi

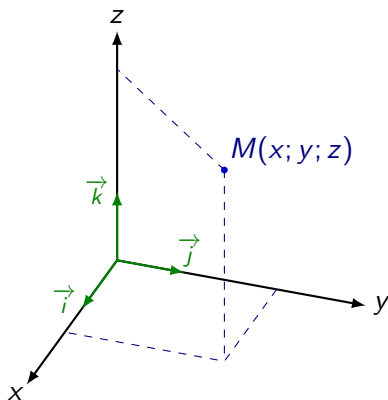
3. Repérage

- 3.1 Repérage d'un point dans le plan
- 3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Repérage d'un point dans l'espace

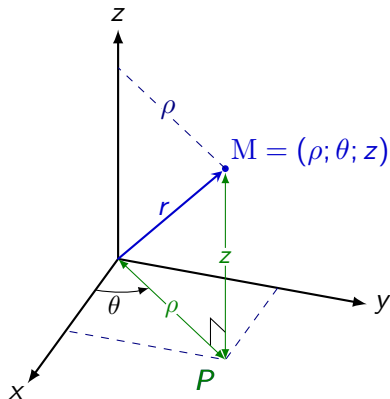
Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x , y et z tels que
$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$



Repérage d'un point dans l'espace

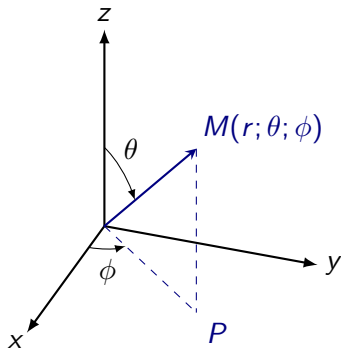
- Les coordonnées cylindriques $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\vec{i} ; \overrightarrow{OP})$.



On a alors
$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Repérage d'un point dans l'espace

- **Les coordonnées sphériques** $(r; \theta; \phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OP}) \in [0; 2\pi[$ et la latitude $\phi = (\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OM})$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors
$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Repérage d'un point dans l'espace

Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\sin(\phi) = \frac{z}{r}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice:

On considère le point $A(0; 2\sqrt{3}; -2)$ dans l'espace. Déterminer ses coordonnées sphériques $(r_A; \theta_A; \phi_A)$.