

Chapitre 1 : Fonctions de la variable réelle

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, une fonction affine f est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est affine mais $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ ne l'est pas.

Exemple:

Soit la fonction affine définie par $f : x \mapsto 5x + 2$, 5 est le coefficient directeur et 2 est l'ordonnée à l'origine.

Remarque

Une fonction affine est simplement l'application du programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Multiplier par m
- Ajouter p

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Méthode: *Représenter une fonction affine*

Représenter graphiquement une fonction affine c'est tracer sa courbe représentative. Pour cela, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que :

$$\begin{cases} y_A = f(x_A) = m \times x_A + p \\ y_B = f(x_B) = m \times x_B + p \end{cases}$$

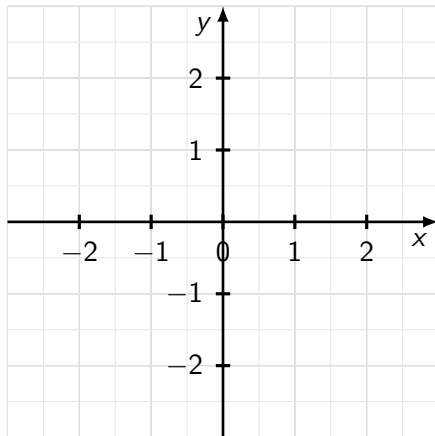
puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Représentation graphique

Exercice :

Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction affine :

$$f(x) = 2x + 1$$

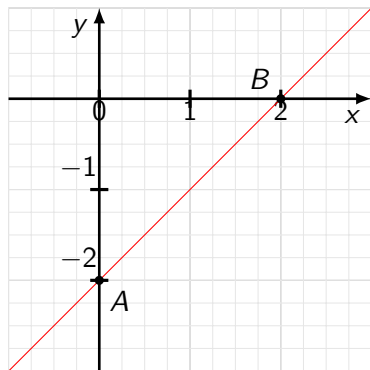


Méthode: *Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine*

- m se détermine en trouvant deux points $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ par lesquels passe la droite, puis en calculant le taux d'accroissement : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- p se détermine en lisant l'intersection courbe/ordonnées.

Représentation graphique

Exemple:



- L'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées est en -2 .

On a donc $p = -2$.

- La courbe passe par les points $A(0, -2)$ et $B(2; 0)$.

On a donc $p = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1$.

On a donc $f(x) = x - 2$.

Exercice:

Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f vérifiant $f(1) = 4$ et $f(5) = -2$.
Représenter cette fonction sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Théorème:

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $m < 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Exercice:

Quel est le sens de variation des fonctions suivantes ?

- $f : x \mapsto 8$
- $g : x \mapsto -3x + 5$
- $h : x \mapsto x$

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soit f une fonction quelconque.

- f est positive sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) > 0$.
- f est négative sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) < 0$.

Remarque

- Déterminer si une fonction est positive ou négative revient à résoudre une inéquation.
- Si une fonction affine f est non constante, alors il existe un unique réel r pour lequel $f(r) = mr + p = 0$. D'où $r = -\frac{p}{m}$.

Signe d'une fonction affine

Exercice :

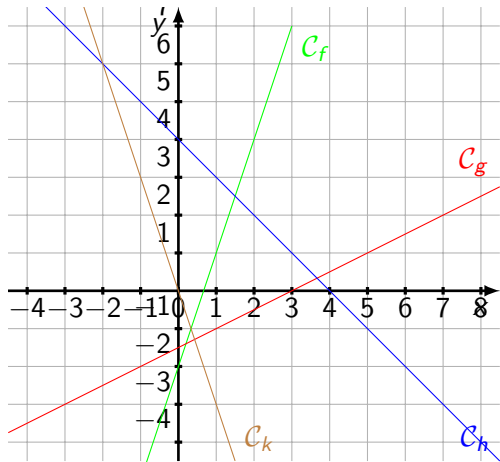
Associer à chaque droite sa représentation graphique

1. $d_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

2. $d_2 : y = 3x - 2$

3. $d_3 : y = -3x$

4. $d_4 : y = -x + 4$



Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition et caractérisation

Propriété:

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.

Définition:

Cette fonction est la fonction exponentielle de base e , notée $\exp$, définie par $\exp : x \mapsto e^x$. Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarque

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

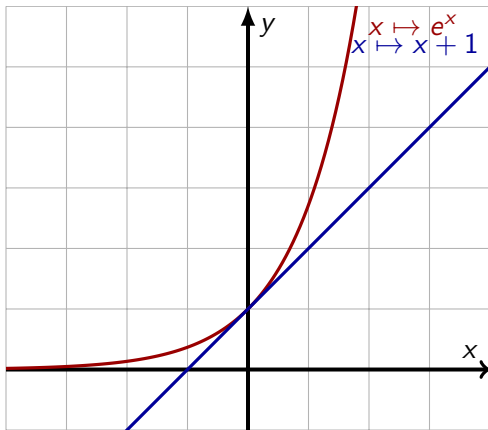
4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \frac{e^{-3}}{e^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (e^{3x})^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Propriété:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = e^6$
- $e^x < e^{-2}$
- $e^{x^2} - e^{-2} = 0$
- $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme népérien de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a :

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Remarque

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- On notera $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas :
- (*Hors programme*) L'unicité du logarithme népérien découle de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété :

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Exemple:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice:

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

Définition:

On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Propriété:

La fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

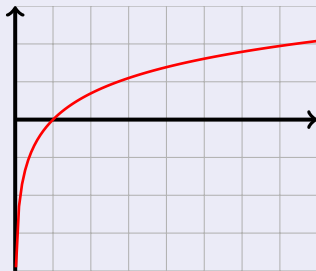
4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



Fonctions usuelles

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Corollaire:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Propriété:

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Exercice:

1. Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$

- $B = \ln(32) - 7\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

2. Dans chacun des cas, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

- $0,92^n \leq 0,75$

- $0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n$

3. Résoudre le système d'équation :
$$\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) &= 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) &= 0 \end{cases}$$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

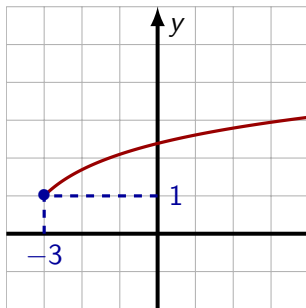
3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

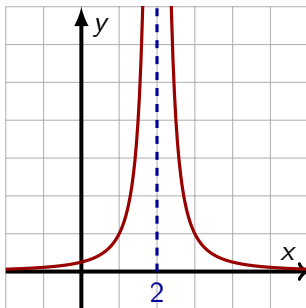
4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Limite en un point



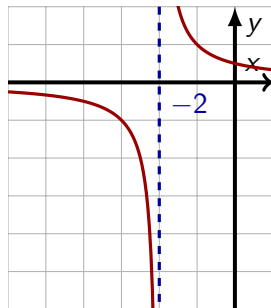
$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

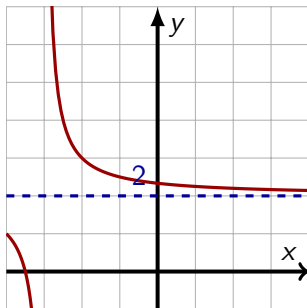
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

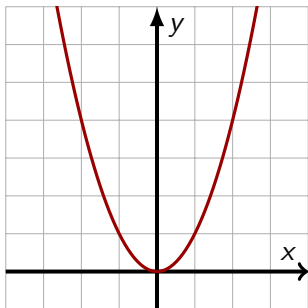
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Limite en ∞



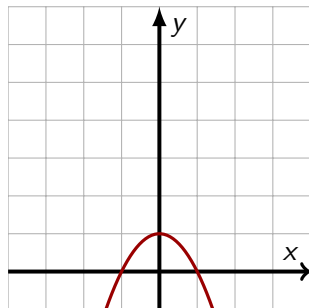
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.

Définition:

Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

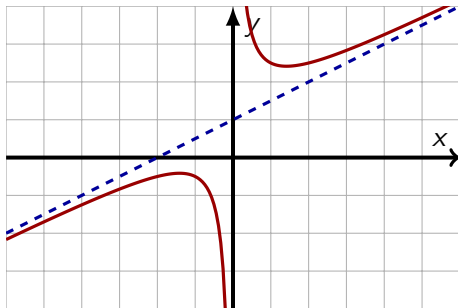
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

on dit alors que la droite d est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Limite en ∞

Exemple:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.



On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Exercice:

Soit le tableau de variation d'une certaine fonction f :

x	$-\infty$	-5	-3	0	$+\infty$
$f(x)$	-2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	3

Diagram illustrating the variation of the function f across different intervals of x :

- Interval $-\infty$ to -5 : $f(x)$ increases from -2 to $+\infty$.
- Interval -5 to -3 : $f(x)$ increases from $-\infty$ to $+\infty$.
- Interval -3 to 0 : $f(x)$ decreases from $+\infty$ to $+\infty$.
- Interval 0 to $+\infty$: $f(x)$ increases from -4 to 3 .

1. Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
2. Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Limites des fonctions usuelles

	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$x^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$	$\ln(x)$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\pm\infty$	0	indéfini	indéfini	indéfini	0	aucune	aucune
$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	0	$\pm\infty$	indéfini	indéfini	indéfini	1^-	1^-	0^-
$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	1^+	1^+	0^+
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	aucune	aucune

Limite d'une somme

$\lim f =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g =$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2 \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x^3)$

Limite d'un produit

$\lim f =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3) \times (e^x - 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times (x - 3) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \times x^3$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$

Limite d'un quotient

$\lim f =$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \frac{f}{g} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3}{e^x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^3}$$

Propriété:

Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+3}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x + 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + 4}$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Les quatre cas d'indétermination des limites sont :

$\lim f$	$\lim g$	Limite indéterminée	Type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x) + g(x)$	$\infty - \infty$
0	$\pm\infty$	$f(x) \times g(x)$	$0 \times \infty$
0	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\infty}{\infty}$

Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Remarque

Lorsqu'on a une forme indéterminée, cela signifie qu'on ne peut pas conclure directement, il faut donc lever l'incertitude en factorisant ou en développant.

Exercice:

Calculer les limites suivantes en explicitement le type d'indétermination:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}(x^2 + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Croissances comparées

Propriété:

Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Remarque

L'idée à retenir, en $+\infty$, est l'ordre de prépondérance " $\ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x$ ".

Corollaire:

Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Rappels:

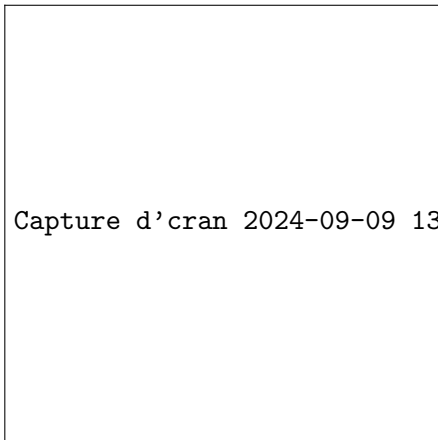
Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dont la droite représentative passe par les points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$. Alors le coefficient directeur de la fonction f est donné par :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

qui est le taux de variation entre les points x_1 et x_2 .

Nombre dérivé

On considère une fonction f quelconque. On s'intéresse aux points de coordonnées $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + h))$



Capture d'écran 2024-09-09 133848.png

Nombre dérivé

D'après le rappel précédent, on peut donc calculer le coefficient directeur de la droite (AM) qui est donné par :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche de A , on va avoir que h se rapproche de plus en plus de 0. Ceci signifie donc que le coefficient directeur de la droite (AM) va être égal à la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

Définition:

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$ et on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On dira que f est dérivable en a .

Remarque

Il se peut que la limite ne soit pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a . C'est le cas de la fonction racine carrée en 0.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^2$, calculer $f'(2)$.

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I , alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f sur I .

Fonction dérivée

On obtient le tableau de dérivation suivant :

	Fonction f	Dérivée f'
Constante	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Affine	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Inverse	$f(x) = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Puissance	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exercice:

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h : x \mapsto \frac{2}{x}$
- $p : x \mapsto -\cos x$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Opérations

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Dérivée
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$

Exercice:

Pour chaque fonction f , exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

1. $f(x) = 3(x^2 + 4)$

2. $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$

3. $f(x) = (2x^2 - 7)^4$

4. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 3}$

5. $f(x) = \frac{1}{-3x + 1}$

6. $f(x) = e^{3x+1}$

7. $f(x) = \ln(-2x + 5)$

8. $f(x) = \cos(2x + 1)$

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les dérivées successives de f , notée :

$$f' ; f'' ; f^{(3)} ; \dots ; f^{(n)}$$

Remarque

En physique et en mécanique, on utilise la notation différentielle :

$$\frac{df}{dt} = f' \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dt^2} = f''$$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(5)}(x)$ en fonction de x .

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Equation de la tangente

Définition:

La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.
On a l'équation de la tangente donnée par :

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.

Méthode:

Soit f une fonction quelconque et $A(a, f(a))$ sur le courbe de f . On veut déterminer la tangente à la courbe de f au point A :

- Déterminer $f(a)$ si on ne le connaît pas déjà ;
- Déterminer le nombre dérivé $f'(a)$ (graphiquement en général) ;
- La tangente au point A est donc de la forme $y = f'(a)(x - a) + f(a)$;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une fonction affine.

Equation de la tangente

Exercice:

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

- $a = -3$, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 2$.
- $a = 5$, $f'(5) = -5$ et la tangente passe par le point de coordonnées $(1, -1)$.

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

On dit que $P_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $x^n \varepsilon(x)$ est le le reste.

Au voisinage de zéro, on a :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$

Développements limités usuels

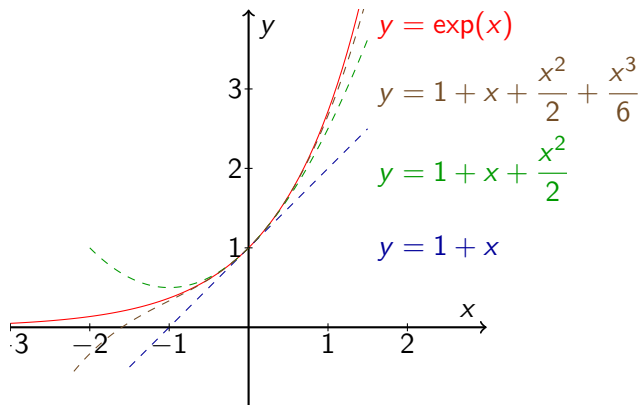
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \varepsilon(x).$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^n \varepsilon(x).$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$

Interprétation graphique

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction au voisinage de 0.

Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !

On a donc par exemple pour la fonction exponentielle.



Etude des variations d'une fonction

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété fondamentale:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

Exemple:

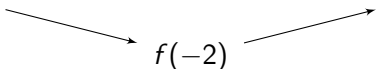
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f .
On a $f'(x) = 4x + 8$.
- On étudie le signe de cette dérivée.
On a $f' < 0$ sur $] -\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $] -2; +\infty[$.
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
On a f strictement décroissante sur $] -\infty; -2[$ et strictement croissante sur $] -2; +\infty[$.

Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

- On trace le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-2)$	$+\infty$



- On cherche les extremums de la fonction f .
On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 1 - \ln(x)$ et $g : x \mapsto (x + 2)e^{-x}$, établir la tableau de variation de f et g sur leur intervalle de définition.

Etude des variations d'une fonction

1. Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines

Définitions et premières propriétés

Représentation graphique

Sens de variation

Signe d'une fonction affine

1.2 Fonction exponentielle

Définition et caractérisation

Limites aux bornes

Sens de variation

Relations fonctionnelles

1.3 Fonction logarithme népérien

Définition et caractérisation

Limites aux bornes et variations

Relations fonctionnelles

2. Limites

2.1 Interprétation graphique

2.2 Limites des fonctions usuelles

2.3 Opérations sur les limites

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

3.1 Nombre dérivé

3.2 Fonction dérivée

3.3 Opérations

3.4 Dérivées successives

3.5 Equation de la tangente

3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

Si f est une fonction continue, dérivable et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a; b]$ alors pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$), l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a; b]$.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, prouver qu'il existe une solution de l'équation $f(x) = 0$ puis arrondir cette racine à 10^{-1} .