

1 Intégration

1.1 Compétences Attendues

- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$.
- Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes.

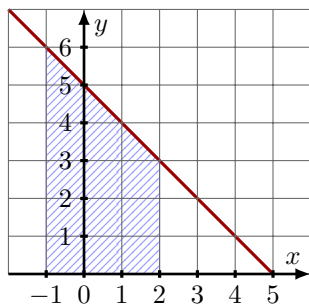
1.2 Exercices

Exercice 1:

Soit $f(x) = 5$. A partir d'une représentation graphique de f , déterminer $\int_{-2}^5 f(x) dx$.

Exercice 2:

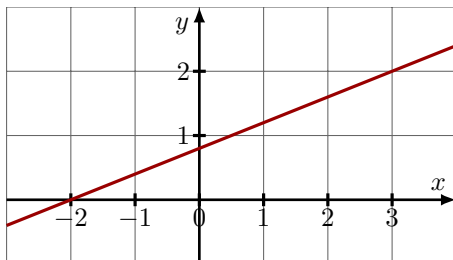
Soit $g(t) = -t + 5$, à l'aide de la représentation graphique ci-dessous, exprimer la zone hachurée à l'aide d'une intégrale puis la calculer de deux manières différentes.



Exercice 3:

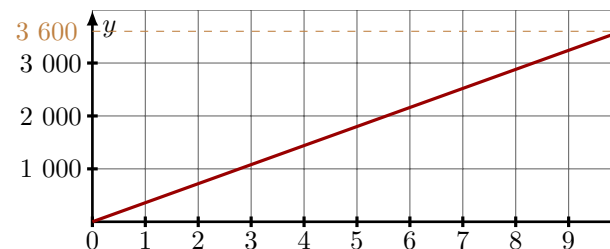
La représentation graphique d'une fonction f est une droite passant par les points A et B de coordonnées respectives $(-2; 0)$ et $(3; 2)$.

Hachurer la zone correspondant à l'intégrale $\int_{-2}^3 f(x) dx$ puis la calculer.



Exercice 4:

Une fusée subit une accélération constante les 10 premières secondes de sa poussée, pour atteindre une vitesse de 3 600 m/s. Sa vitesse $v(t)$ atteinte au bout de t (en seconde) peut être lue sur le graphique ci-dessous.

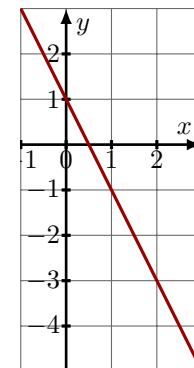


On admet que la distance parcourue au cours des 10 premières secondes est égale à $d = \int_0^{10} v(t) dt$. Hachurer la zone correspondant à cette intégrale puis la calculer.

Exercice 5:

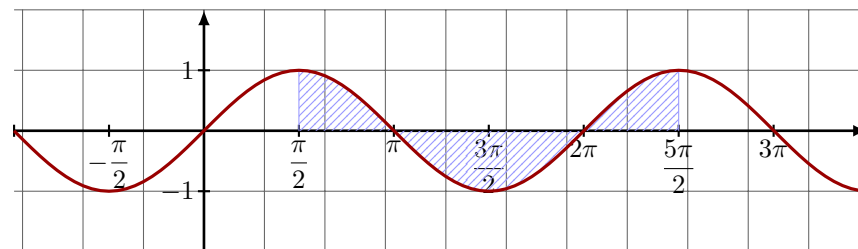
Soit g la fonction affine définie sur $[-1, 3]$ par $g(x) = -2x + 1$.

1. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.
2. Hachurer la zone correspondant à l'intégrale $\int_{-1}^3 g(x) dx$.
3. Calculer $\int_{-1}^3 g(x) dx$.



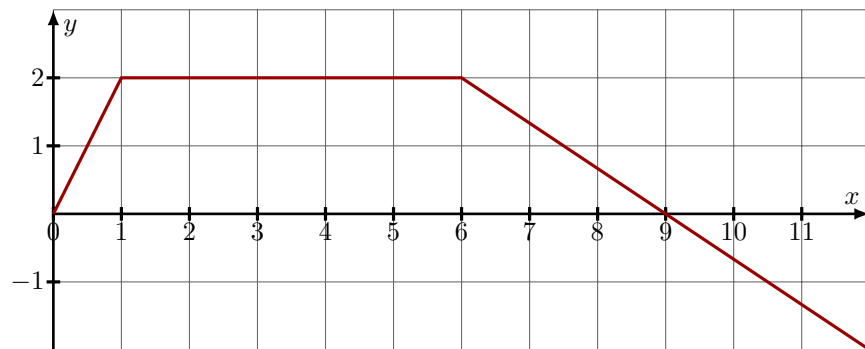
Exercice 6:

A partir de la représentation graphique de la fonction sinus ci-dessous, exprimer la zone hachurée à l'aide d'une intégrale puis calculer sa valeur de deux manières différentes.



Exercice 7:

On modélise l'accélération d'un mobile par une fonction a représentée ci-dessous où $a(t)$ est l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) au temps t (en s).



On admet que la vitesse atteinte à l'instant t_0 est $v(t_0) = \int_0^{t_0} a(t) dt$.

Calculer $v(6)$ puis $v(12)$.

Exercice 8:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-1}^1 2t \, dt \quad \left| \quad 2. \int_0^3 2x - 3 \, dx \right.$$

Exercice 9:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-5}^7 \sqrt{2} \, dx \quad \left| \quad 2. \int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4) \, dx \right.$$

Exercice 10:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1) \, dx \quad \left| \quad 2. \int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x) \, dx \right.$$

Exercice 11:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^\pi 3 + \sin(x) \, dx \quad \left| \quad 2. \int_{-1}^1 \cos(3t - 5) \, dx \right.$$

Exercice 12:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) - 3 \sin(5x)) \, dx \quad \left| \quad 2. \int_{-1}^1 (x^{17} + 2x^9 + x - 1) \, dx \right.$$

Exercice 13:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^{10} \frac{2}{x^2} \, dx \quad \left| \quad 2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{3} \sin\left(-6x + \frac{4\pi}{5}\right) \, dx \right.$$

Exercice 14:

Soit les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$$

On admet que $J = \frac{\pi}{4}$.

$$1. \text{ Montrer que } I + J = \int_0^1 1 \, dx.$$

2. En déduire la valeur de I .

Exercice 15:

Soit les intégrales :

$$C = \int_0^\pi \cos^2(x) \, dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx$$

$$1. \text{ On admet que } \int_0^\pi \cos^2(x) - \sin^2(x) \, dx = 0. \text{ En déduire la valeur de } C - S.$$

$$2. \text{ Montrer que } C + S = \pi.$$

$$3. \text{ En déduire les valeurs de } C \text{ et de } S.$$

Exercice 16:

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -1 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Calculer } \int_{-4}^1 f(t) \, dt.$$

Exercice 17:

Soit une fonction f telle que $\int_0^2 f(x) dx = 2$. Montrer que la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto f(x) - 1$ est nulle sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice 18:

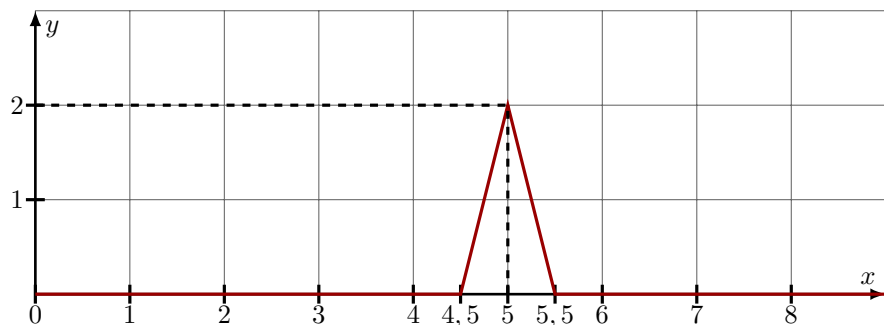
Soient f, g deux fonctions continues sur $[1; 2]$ telles que :

$$\int_1^2 f(x) dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_1^2 g(x) dx = -3$$

$$1. \text{ Calculer } \int_1^2 (5f(x) - g(x)) dx \quad \left| \quad 2. \text{ Calculer } \int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x) \right) dx$$

Exercice 19:

On contrôle la qualité de pièces devant poser en sortie d'usine 5g avec un instrument équipé d'un dispositif d'affichage dont le dernier chiffre significatif correspond à 1 g. Pour une pièce dont l'instrument de pesage indique 5 g, on fait l'hypothèse que la probabilité que la masse de la pièce pesée soit effectivement comprise dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est $\int_\alpha^\beta f(t) dt$ où f est la fonction représentée ci-dessous.



Quelle est la probabilité que la pièce ait une masse comprise entre 4,8 g et 5,2 g ? inférieure à 6 g ?

Exercice 20:

- On souhaite calculer l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

On admet qu'une primitive de la fonction f donnée par $F : x \mapsto \frac{2}{5}\sqrt{x} \times x^2$. Calculer la valeur exacte de l'aire cherchée.

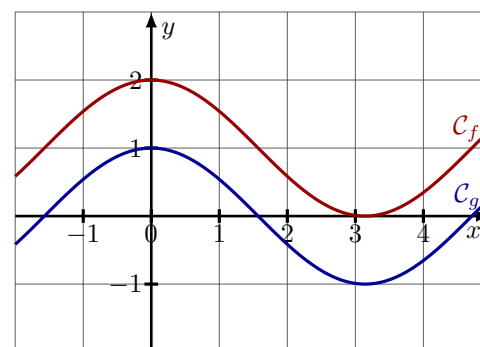
- La surface obetnue par la révolution de la courbe précédente autour de l'axe (Ox) a la forme d'une "trompette". On admet que le volume de l'objet délimité par cette surface est :

$$V = 2\pi \int_0^2 f(x)^2 dx$$

Quelle est la valeur exacte de ce volume V ?

Exercice 21:

Dans le repère ci-dessous, on a représenté graphiquement les fonction $f(x) = 1 + \cos(x)$ et $g(x) = \cos(x)$.



On note :

- D_1 le domaine du plan délimité par les courbes représentatives de f et g et des droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$;
- D_2 le domaine du plan délimité par les courbes de f et g et des droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

Hachurer de deux couleurs différentes les zones correspondantes à chaque domaine D_1 et D_2 .

Que vaut l'aire de chaque domaine ? Que peut-on remarquer ?

Exercice 22:

Une entreprise du bâtiment est chargée de construire des arches de béton qu'elle réalise en deux parties.

Chaque partie est assimilée à une plaque homogène dont le contour est une parabole d'équation :

$$y = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = x - 4x^2 \quad \text{pour} \quad x \in [0; 2]$$

Pour lever ces plaques à l'aide d'une grue, une fixation doit être prévue et placée de façon à maintenir un équilibre.

On admet que cette position d'équilibre est telle que l'abscisse du point d'ancrage de la grue vérifie :

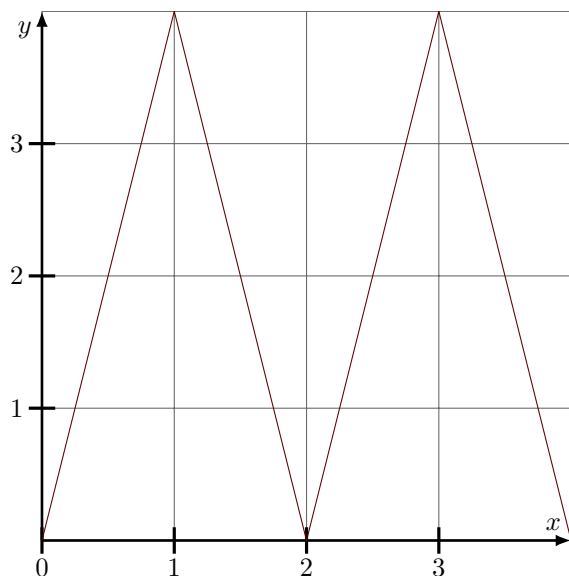
$$x_A = \frac{1}{S} \int_0^2 x f(x) \, dx$$

où S est l'aire de la surface de la plaque.

Quelle est l'abscisse de ce point d'ancrage ?

Exercice 23:

Un dipôle est soumis à une tension périodique $u(t)$ (en V) au temps t (en ms). Cette tension triangulaire est représentée ci-dessous.



1. Lire sur le graphique la période T de cette fonction u .
2. Déterminer $\int_0^2 u(t) \, dx$ à partir du graphique.
3. En déduire une valeur de la tension moyenne aux bornes de ce dipôle sur une période.
4. On admet maintenant que sur l'intervalle $[0; 2]$ on a :

$$u(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -4t + 8 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

En utilisant la relation de Chasles, retrouver par le calcul la tension moyenne déterminée à la question précédente.

5. On appelle valeur efficace de la tension $u(t)$ le réel :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^2 u(t)^2 \, dt}$$

Calculer U .

Exercice 24:

Soit $f : x \mapsto 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ définie sur $\left[0; \frac{5\pi}{3}\right]$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)^2$. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
2. On admet que, pour tout réel a , $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.
En déduire que

$$\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

3. Déterminer alors une primitive G de g sur l'intervalle $\left[0; \frac{5\pi}{3}\right]$.
4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \right] dx$$

5. Calculer la valeur exacte de

$$V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{3}} f(x)^2 \, dx$$

Exercice 25:

Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A . On attache un mobile à son autre extrémité M .

On suppose que l'accélération $a(t)$ du mobile au temps t vérifie

$$a(t) = \frac{3}{4} \sin(3t) + \sin(t)$$

La vitesse $v(t_0)$ du mobile à l'instant t_0 vaut :

$$v(t_0) = \int_0^{t_0} a(t) \, dt$$

Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto a(t)$ puis en déduire une expression de $v(t_0)$ en fonction de t_0 .