

Exercice 1: Automatismes (... / 3 points)

1. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $\frac{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \frac{2}{5}$.
2. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $(3x - 2)(x + 1)^2$ est une factorisation de $3x^3 + 4x^2 - x - 2$.
3. Résoudre l'équation $4(x - 1)(2x + 3) = 0$.

Solution :

1. On a $\frac{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \frac{3 \times \sqrt{3 \times 4}}{3 \times \sqrt{3 \times 25}} = \frac{\cancel{3} \times \sqrt{\cancel{3}} \times \sqrt{4}}{\cancel{3} \times \sqrt{\cancel{3}} \times \sqrt{25}} = \frac{2}{5}$
2. On a $(3x - 2)(x + 1)^2 = (3x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$
3. On a $x - 1 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ donc $S = \left\{ 1 ; -\frac{3}{2} \right\}$

Exercice 2: Tronc commun (... / 5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -\frac{1}{4}$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
4. Calculer u_{80} .
5. Calculer $\sum_{n=0}^{80} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{80}$.

Solution :

1. On a :
 $u_1 = u_0 + r = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4,75$ et $u_2 = u_1 + r = \frac{19}{4} - \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = 4,5$ et $u_3 = u_2 + r = \frac{18}{4} - \frac{1}{4} = \frac{17}{4} = 4,25$
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $r = -\frac{1}{4} < 0$.
3. On a $u_n = u_0 + nr = 5 - \frac{1}{4}n$
4. On a $u_{80} = 5 - \frac{1}{4} \times 80 = 5 - 20 = -15$
5. On a $\sum_{n=0}^{80} u_n = (80 + 1) \times \frac{(u_0 + u_{80})}{2} = 81 \times \frac{5 - 15}{2} = -\frac{405}{2} = -202,5$

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique (... / 3 points)

1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^9 \, dx$.
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \cos(2\pi x) + 1$$

- (a) Déterminer une primitive F de f .
- (b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^9 \, dx &= \left[\frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned} \tag{1}$$

2. (a) La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) + x$ est une primitive de f .
- (b) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi) + 1 \right) - \left(\frac{1}{2\pi} \sin(2 \times 0) + 0 \right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 1: Automatismes (... / 3 points)

1. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $\frac{\sqrt{5^2} \times \sqrt{20}}{5\sqrt{45}} = \frac{2}{3}$.
2. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $(2x+3)(x-1)^2$ est une factorisation de $2x^3 - x^2 - 4x + 3$.
3. Résoudre l'équation $6(x+1)(3x-2) = 0$.

Solution :

1. On a $\frac{\sqrt{5^2} \times \sqrt{20}}{5\sqrt{45}} = \frac{5 \times \sqrt{5 \times 4}}{5 \times \sqrt{5 \times 9}} = \frac{\cancel{5} \times \sqrt{\cancel{5}} \times \sqrt{4}}{\cancel{5} \times \sqrt{\cancel{5}} \times \sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
2. On a $(2x+3)(x-1)^2 = (2x+3)(x^2-2x+1) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$
3. On a $x+1=0$ ou $3x-2=0$ donc $S = \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$

Exercice 2: Tronc commun (... / 5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
4. Calculer u_{20} .
5. Calculer $\sum_{n=0}^{20} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

Solution :

1. On a :
 $u_1 = u_0 + r = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$ et $u_2 = u_1 + r = \frac{21}{2} + \frac{1}{2} = \frac{22}{2} = 11$ et $u_3 = u_2 + r = \frac{22}{2} + \frac{1}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante car $r = \frac{1}{2} > 0$.
3. On a $u_n = u_0 + nr = 10 + \frac{1}{2}n$
4. On a $u_{20} = 10 + \frac{1}{2} \times 20 = 10 + 10 = 20$
5. On a $\sum_{n=0}^{20} u_n = (20+1) \times \frac{(u_0 + u_{20})}{2} = 21 \times \frac{10+20}{2} = \frac{630}{2} = 315$

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique (... / 3 points)

1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^7 \, dx$.
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \sin(\pi x) + 1$$

- (a) Déterminer une primitive F de f .
- (b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^7 \, dx &= \left[\frac{x^8}{8} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned} \tag{3}$$

2. (a) La fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + x$ est une primitive de f .
- (b) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= F(1) - F(0) \\ &= \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) + 1 \right) - \left(-\frac{1}{\pi} \cos(0) + 0 \right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \end{aligned} \tag{4}$$