

Suites numériques

1.1 Compétences Attendues

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

1.2 Exercices

Exercice 1:

On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et sa raison $r = \frac{1}{4}$. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4 .

Exercice 2:

On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et sa raison r . Dans chacun des cas suivants, calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5 .

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$
2. $u_0 = 0,36$ et $r = 0,25$
3. $u_0 = 1000$ et $r = 56,3$

Exercice 3:

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}$.

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5
2. Placer les six premiers points de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4:

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $v_1 = -3$ et de raison $r = 2,6$.

1. Calculer les termes v_2 , v_3 et v_4 .
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant v_{n+1} en fonction de v_n .
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
4. Calculer v_{50} .
5. Calculer $S = \sum_{k=1}^{50} v_k$.

Exercice 5:

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $w_2 = 2,5$, de raison $r = -0,25$.

1. Calculer les termes w_3 , w_4 et w_5 .
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant w_{n+1} en fonction de w_n .
3. Donner l'expression de w_n en fonction de n .
4. Calculer w_{30} .
5. Calculer $S = \sum_{k=2}^{30} w_k$.

Exercice 6:

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{15} .
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{15} u_k$.

Exercice 7:

On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_3 = -2$ et $u_{14} = 39$.

1. Déterminer le nombre de termes entre u_3 et u_{14} .
2. Calculer $S = \sum_{k=3}^{14} u_k$.

Exercice 8:

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de 30 jours de faire chaque jour 5 minutes de sport de plus que le jour précédent. On modélise cette situation par une suite (t_n) telle que $t_0 = 0$ où t_n est le temps passé par cette personne à faire du sport le n -ième jour.

1. Déterminer t_1 et t_2 .
2. Déterminer la nature de la suite (t_n) .
3. Exprimer t_n en fonction de n .
4. Déterminer le temps passé à faire du sport le trentième jour.

5. Calculer $\sum_{k=0}^{30} t_k$.

Exercice 9:

Chaque somme S est la somme de termes successifs d'une suite arithmétique (u_n) . Identifier la suite arithmétique puis calculer S .

1. $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 202$
2. $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 202$
3. $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 201$

Exercice 10:

On considère la suite (u_n) arithmétique telle que $u_8 = 78$ et $u_{607} = 3\,935$.

1. Déterminer le nombre de termes entre u_8 et u_{607} .

2. Calculer $S = \sum_{k=8}^{607} u_k$.

Exercice 11:

La cloche d'une église sonne toutes les heures : 1 coup à 1h00, 2 coups à 2h00... Un villageois se plaint du bruit.

Pour tout entier naturel n on note (u_n) le nombre de coups à la n -ième heure.

1. Préciser u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
3. Combien de tintements le villageois entend-il en une journée ?

Exercice 12:

Cédric s'est inscrit au marathon de Paris et il souhaite organiser sa préparation. Dans son programme d'entraînement hebdomadaire, il prévoit une séance unique. 16 semaines avant le départ, lors de sa première semaine de préparation, il court 15 kilomètres. Chaque semaine, il augmente la distance parcourue de 1,5 kilomètre. Pour n entier naturel, on note u_n la distance parcourue pendant la séance de la n -ième semaine.

1. (a) Préciser u_1 , u_2 et u_3 .
(b) Déterminer la nature de la suite (u_n) .
2. Pensez-vous que Cédric sera prêt pour le marathon de Paris (42,195 km) ?
3. Quelle distance aura-t-il parcourue pendant ses quatre mois d'entraînement ?

Exercice 13:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Dans chacun des cas suivants, calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5 .

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $u_0 = 1,5$ et $q = 2$ | 3. $u_0 = 5000$ et $q = 1,03$ |
| 2. $u_0 = 10000$ et $q = 1,1$ | 4. $u_0 = 1000$ et $q = 0,9$ |

Exercice 14:

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $q = 2$ telle que $u_4 = 12$. Calculer u_3 ; u_5 et u_6 .

Exercice 15:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. Placer les cinq premiers points de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un repère orthogonal.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 16:

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $v_1 = -3$ et de raison $q = 2,6$.

1. Calculer les termes v_2 , v_3 et v_4 .
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant v_{n+1} en fonction de v_n .
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
4. Calculer v_{50} .

5. Calculer $S = \sum_{k=1}^{50} v_k$.

Exercice 17:

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $w_2 = 2,5$ et de raison $q = 0,25$.

1. Calculer les termes w_3 , w_4 et w_5 .
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant w_{n+1} en fonction de w_n .
3. Donner l'expression de w_n en fonction de n .
4. Calculer w_{30} .

5. Calculer $S = \sum_{k=2}^{30} w_k$.

Exercice 18:

On considère la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_7 .

3. Calculer $S = \sum_{k=0}^7 u_k$.

Exercice 19:

On considère la suite géométrique de raison 1,15 telle que $u_3 = 5$.

1. Déterminer le nombre terme entre u_3 et u_{14} .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer u_{14} .

4. Calculer $S = \sum_{k=3}^{14} u_k$.

Exercice 20:

La salaire annuel d'embauche d'un employé est de 20 000 euros. Son contrat prévoit une augmentation annuelle de 2%.

On note $u_0 = 20\,000$ et u_n le salaire annuelle au bout de n années.

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) .

3. Exprimer u_n en fonction de n .

4. Si l'employé reste 10 ans dans la même entreprise, déterminer son salaire annuel au bout de la dixième année.

5. Calculer la somme totale obtenue après 10 ans dans cette même entreprise.

Exercice 21:

Chaque somme S est la somme de termes successifs d'une suite géométrique (u_n) . Identifier la suite géométrique puis calculer S .

1. $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2\,048$

2. $S = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{8\,192}$

3. $S = 2 + 6 + 18 + \dots + 13\,122$

Exercice 22:

Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2026, il reçoit une commande de 7 500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.

1. Ce délai est-il suffisant ? Justifier la réponse.
2. Le chef d'atelier décide d'augmenter la production chaque semaine de 5%. On note (u_n) le nombre de lunettes produites la n -ième semaine et on a $u_0 = 250$.
 - (a) Calculer u_1 et u_2 .
 - (b) Déterminer la nature de la suite (u_n) .
 - (c) Exprimer u_n en fonction de n .
3. Conclure.

Exercice 23:

En janvier 2019, une firme offrait sur le marché 2 000 unités d'un nouveau produit avec une perspective d'augmentation de cette production de 5% par an. On suppose que ces prévisions se poursuivent. On pose $p_0 = 2\,000$.

On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année 2019 + n .

1. Calculer p_1 , p_2 et p_3 .
2. Exprimer pour tout entier n , p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la nature de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Exprimer p_n en fonction de n .
4. Calculer la production totale prévisible entre janvier 2019 et janvier 2026.

Exercice 24:

Une blanchisserie industrielle prévoit d'augmenter sa capacité de lavage de draps pour des hôtels de 10% chaque année. Cette blanchisserie a lavé 260 000 draps la première année. Dans ce qui suit, U_n désigne le nombre prévu de draps lavés la n -ième année, donc $U_1 = 260\,000$.

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4 .
2. Exprimer pour tout entier n , U_{n+1} en fonction de U_n . En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Exprimer U_n en fonction de n .
4. On admet que l'objectif prévisionnel est maintenu.
 - (a) Calculer le nombre de draps lavés la 10^e année.
 - (b) Calculer le nombre total de draps que la blanchisserie aura lavés pendant 10 ans.

Exercice 25:

Afin d'assurer son appartement, un couple compare deux propositions.

- *Proposition A:* Le montant de l'assurance est de 200 euros la première année puis augmente de 10 euros par an.
- *Proposition B:* le montant de l'assurance est de 100 euros la première année et augmente de 6% par an.

On note a_n le montant de l'assurance avec la proposition *A* et b_n celui avec la proposition *B* la n -ième année. Ainsi $a_1 = 200$ et $b_1 = 100$.

1.
 - (a) Calculer a_2 puis a_3 .
 - (b) Donner la nature de la suite (a_n) en précisant sa raison.
 - (c) Donner, pour tout entier n , a_n en fonction de n .
2.
 - (a) Calculer b_2 puis b_3 .
 - (b) Donner la nature de la suite (b_n) en précisant sa raison.
 - (c) Donner, pour tout entier n , b_n en fonction de n .
3. Quelle proposition est la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans ? Justifier la réponse.

Exercice 26:

Pour un emploi dans lequel elle compte rester 15 ans, Bahiya se voit proposer deux contrats de travail.

- *Contrat 1:* Le salaire annuel net est de 21 000 euros avec augmentation de 1 000 euros par an ;
- *Contrat 2:* Le salaire annuel net est de 18 000 euros avec une augmentation de 8% par an.

1. On commence par étudier le contrat 1.
On note u_n la valeur du salaire la n -ième année.
 - (a) Déterminer u_1 , u_2 et u_3 .
 - (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - (c) Exprimer u_n en fonction de n .
 - (d) Calculer u_{15} .
2. On étudie maintenant le contrat 2.
On note v_n la valeur du salaire la n -ième année.
 - (a) Déterminer v_1 , v_2 et v_3 .
 - (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n .
 - (d) Calculer v_{15} .
3. On peut maintenant comparer les deux contrats.
 - (a) Expliquer pourquoi le contrat 2 proposera un salaire plus intéressant à long terme.
 - (b) On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le salaire annuel du contrat 2 deviendra supérieur à celui du contrat 1. Compléter la fonction Python suivant.

```

1 def contrat():
2     n=0
3     u=21000
4     v=18000
5     while u>v:
6         u=.....
7         v=.....
8         n=.....
9     return n

```

- (c) On sait donc que le salaire annuel du contrat 2 dépassera celui du contrat 1. Toutefois, les premières années, le contrat 1 propose un salaire annuel supérieur. Bahiya ne souhaite rester que 15 ans dans cette entreprise. En cumulant les salaires de ces quinze années, quel contrat Bahiya a-t-elle intérêt à choisir ?