1 Equations différentielles

1.1 Compétences Attendues

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du type : $y' = ay + b$.
- Déterminer la solution d'une équation différentielle du type : $y' = ay+b$ vérifiant une condition initiale $y(x_0)$ donnée.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On considère l'équation différentielle $y' = -4y$. La fonction $f(x) = -2e^{-4x}$ est-elle solution de cette équation ?

Exercice 2:
Dans chaque cas, vérifier si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

1. $f(x) = e^{-2x}$ et $(E) : y' - 2y = 0$.
2. $f(x) = \sqrt{3}e^{-3x}$ et $(E) : y' + 3y = 0$.

Exercice 3:
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$?

1. $f(x) = 2e^{-2x}$
2. $g(x) = e^{-2x}$
3. $h(x) = 2x$

Exercice 4:
Soit $f(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$.

1. Déterminer $f'(t)$ et $f''(t)$, où f' est la dérivée de f et f'' la dérivée de f'.
2. Montrer que la fonction est une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

Exercice 5:
Soit $f(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Déterminer $f'(t)$ et $f''(t)$.
2. La fonction f est-elle une solution de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{9}y = 0$?
3. Mêmes questions avec $g(t) = \cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 6:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = 2$
2. $y' = 5x - 3$
3. $y' = x^3$
4. $y' = 3x^2 + 2x + 1$

Exercice 7:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$
2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
3. $5y' + 3y = 0$
4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 8:
Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$
3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \frac{1}{e}$

Exercice 9:
Déterminer la solution f de l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 1$ avec $f'(1) = 2$.

Exercice 10:

1. La vitesse de rotation θ (en rad/s) d'une lame de scie circulaire en fonction du temps vérifie l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4}\theta$$
Déterminer une expression de $\theta(t)$ en fonction du temps t.
2. L'intensité i du courant en fonction du temps t dans un circuit avec une résistance et une bobine vérifie :
$$2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{10}i(t) = 0$$
Déterminer une expression de i en fonction de t.

Exercice 11:
LA puissance consommée par un processeur dans un ordinateur est constante égale à 130 W. Elle se décomposé en une puissance P_1 qui participe à l'élévation de la température dans le boitier du processeur et une puissance P_2 qui est évacuée vers le radiateur de l'ordinateur. A chaque instant t on a

$$P_1(t) + P_2(t) = 130$$

On considère la fonction f qui donne, à chaque instant t, la différence entre la température du boîtier du processeur et celle de l'air à l'intérieur du circuit. On admet que :

$$P_1(t) = 0,13\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{et} \quad P_2(t) = 3,9f(t)$$

1. Ecrire une relation entre $f(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$.
2. Vérifier que cette relation peut s'écrire :
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = -30f(t) + 1\ 000$$
3. Elya propose $f(t) = e^{-30t} + 30$ comme expression de f en fonction du temps t, est-ce correct ?

Exercice 12:
A son départ, un TGV met 7 minutes pour passer de l'immobilité à la vitesse de 300 km/h, avec une accélération constante a.

1. Calculer l'accélération a.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $y' = a$.
   (b) En déduire une expression de la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Quelle distance a parcouru le TGV pour atteindre sa vitesse de croisière ?

Exercice 13:
Dans la plupart des systèmes haute pression à injection (HDi), les injecteurs fonctionnent sous une tension minimale de 79,9 volts. Pour arriver à cette tension, on utilise un circuit mettant en jeu un condensateur et des transistors de puissance, qui permettent de charger le condensateur puis d'alimenter les injecteurs. La tension U (en V) vérifie l'équation différentielle :

$$(E) : U'(t) = -0,1U(t)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. En tenant compte de la condition initiale $U(0) = 24$ V, exprimer la tension $U(t)$ en fonction de t.
3. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t)$.

Exercice 14:
Le béton permet de réaliser divers éléments de construction : fondations, dalles, poutres, etc. Quelle que soit son utilisation, le béton est composé de ciments, de granulats et d'eau. Seules les proportions de chaque composant change suivant la destination du béton.
Dans cet exercice, on s'intéresse au béton adapté à la construction d'une dalle et on étudie la résistance à la compression (en MPa) en fonction de la durée t de séchage (en jour).
On admet que cette résistrance peut être modélisée par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui est une solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0,15y = 4,5$$

A l'instant $t = 0$, la résistance à la compression de ce béton est nulle.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Exercice 15:
Une bille est lâchée (sans vitesse initiale) dans un récipient contenant de l'huile et on étudie l'évolution de sa vitesse en fonction du temps. On se place dans un repère d'axe (Oz) vertical, dirigé vers le bas et do'rigine O. On note m (en kg) la masse de la bille et V (en m^3) son volume.
La bille subit en chute libre verticale :

- son poids $\overrightarrow{P}$ (orienté vers le bas) ;
- une force de freinage $\overrightarrow{F_1}$ orienté vers le haut et d'intensité $F_1 = kv$;
- la poussée d'archimède $\overrightarrow{F_2}$ orientée vers le haut et d'intensité $F_2 = \rho V g$.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique sur la bille pour montrer que la vitesse est solution de :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}v + \frac{(m-\rho V)g}{m}$$
2. La bille est an alluminium de volume 2 cm^3, de masse 5,4 g. Elle est lâchée dans de l'huile synthétique dont la masse volumique est de 1 350 $\mathrm{kg.m}^{-3}$.
Déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction t puis déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 16:
Un TGV lancé à 300 km/h doit freiner d'urgance. On fait l'hypothèse que son accélération est de la forme $a(t) = kt$ avec $k < 0$. Il s'arrête en 32 secondes. Sur quelle distance a-t-il freiné ?

Exercice 17:
La loi de refroidissement de Newton énonce :
"La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant."

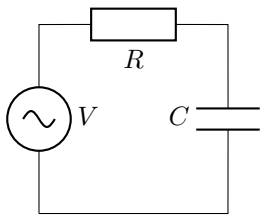
1. Traduire cette loi par une équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ du corps en fonction du temps t écoulé.
2. Dans un pièce à 20°C, on remplit une tasse de café à 75°C. Deux minutes plus tard, la température du café est de 60°C. Exprimer $\theta(t)$ en fonction du temps t puis déterminer la limite en $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 18:
Lors du branchement d'une batterie de voiture électrique sur une borne, l'évolution de la charge (en kWh) peut être modélisée par une fonction f, solution de l'équation différentielle

$$y' = -0,55y + 12,1$$

A l'instant $t = 0$, la batterie est vide et il faut 8h pour la charger complètement. Cependant, le constructeur affirme qu'après 4h, la batterie est à environ 90% de sa capacité de charge. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 19:
Un condensateur de capacité $C = 20\mu F$ est placé, avec une résistance $R = 1000\Omega$, dans un circuit électrique RC dont le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension continue $E = 6V$.



La charge q du condensateur vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$$

et elle est nulle à l'instant $t = 0$.

1. Ecrire l'équation vérifiée par q sous la forme $y' = ay+b$. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+$ et donner une expression de q en fonction de t.
2. Quelle charge le condensateur tend-il à avoir si on attend suffisamment ? Au bout de combien de temps atteint-il la moitié de cette charge ?

Exercice 20:
La vitesse de chute verticale v (en m/s) d'un objet de masse $m = 2kg$ vérifie l'équation:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}v + g$$

où $g = 9,8\ m/s^2$ est le norme du champ de pesanteur, $\gamma = 1,96\ kg/s$ le coefficient de frottement et t le temps (en s) écoulé depuis le début de la chute.

1. Ecrire l'équation vérifiée par v sous la forme $y' = ay+b$. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+$ et donner une expression générale de v en fonction de t.
2. Quel est le comportement de v lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter dans le contexte.

Exercice 21:
On place un capital de 2000 euros dans une banque aux taux d'intérêt annuel composé de $1,5\%$.

1. On note C_n la valeur du capital acquis au bout de n années de placement.
   (a) Donner une expression de C_n en fonction de n.
   (b) En supposant que ce capital évolue de manière journalière et en notant S_n sa valeur acquise au bout de n jours, justifier que, pour tout entier positif n, on a $S_n = 2000 \times 1,015^{\frac{n}{365}}$
2. On suppose que le capital évolue à chaque instant et on note $f(t)$, en euros, sa valeur acquise après t années. On considère alors que f est dérivable et que, pour tout nombre réel strictement positif t, on a :

   $$f'(t) = 0,015f(t)$$

   Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$.
3. Comparer les valeurs acquises au bout de 3 jours, 125 jours, 1 an et 2 ans avec chacun des deux modèles proposés. Que constate-t-on ?

Exercice 22:
Dans une usine, la température d'un moteur thermique est régulée par un système de circulation d'eau de refroidissement. Quand la température de cette eau atteint 90°C, un ventilateur se met en action afin de refroidir le liquide dans le radiateur. Il s'arrête lorsque la température redevient inférieure à 50°C.

On mesure le temps t (n minutes) écoulé à partir de l'instant où le ventilateur se déclenche.
On admet que la température de l'eau, exprimée en degré Celsius, est donnée à l'instant t par $f(t)$ où la fonction f vérifie sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) : f' + 0,04f = k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 90 \quad \text{et} \quad f(10) = 77,14$$

1. Déterminer la solution f sur $[0; +\infty[$ de (E) qui vérifie les conditions initiales.
2. Le ventilateur va-t-il s'arrêter ? Justifier.

Exercice 23:
L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Tout échantillon d'iode 131 qui diminue régulièrement par désintégration.

1. Dans un premier livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 diminue de $8,3\%$ chaque jour. On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g.
   (a) Calculer, arrondie au dixième, la masse M_1 de l'échantillon au bout d'une journée puis sa masse M_2 au bout de 2 jours.
   (b) On note M_n la masse de l'échantillon au bout de n jours. Démontrer que (M_n) est une suite géométrique.
   (c) Calculer la masse M_{10} de l'échantillon au bout de 10 jours, arrondie au dixième.
2. Dans un second livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 est une fonction du temps $M : t \mapsto M(t)$ qui est solutions d'une équation différentielle :
   $$(E) : M'(t) = \lambda M(t)$$
   où t est exprimé en jours et λ une constante réelle.
   (a) Résoudre l'équation (E).
   (b) Sachant qu'à $t = 0$, la masse de l'échantillon est de 100 g, exprimer $M(t)$ en fonction de t et de λ.

Exercice 24:
L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.
Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane. La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,12y + 0,003$$

A l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de $0,5$ mole par litre.

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   (b) Donner $f(0)$.
   (c) Vérifier que $f(t) = 0,475e^{-0,12t} + 0,25$.
2. (a) Déterminer $f'(t)$.
   (b) Etudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$
   (c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'énoncé.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat.
   (b) Le processus de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.