1 Fonction exponentielle

1.1 Compétences Attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Étudier les variations de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles (du type $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel) et de fonctions polynômes.
- Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles et de fonctions polynômes.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Ecrire sous la forme e^a les expressions suivantes :

1. $A = e^{\frac{1}{3}} \times e^{\frac{3}{4}}$
2. $B = \dfrac{e^2 \times e^{-3}}{e^5}$
3. $C = \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^6$

Exercice 2:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \left(\dfrac{e \times e^{-5}}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
2. $B = \dfrac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{1,2}}$
3. $C = \left(\dfrac{e \times e^2}{e^{-7}}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. $D = e^{1,5} \times \left(e^{-0,5}\right)^5$

Exercice 3:
Ecrire sous la forme e^{ax} les expressions suivantes :

1. $A = e^{5x} \times e^{-2x}$
2. $B = \dfrac{\left(e^{-x}\right)^2}{e^{-5x}}$
3. $C = \left(e^{-2x}\right)^3 \times e^{4x}$
4. $D = \dfrac{e^{2x} \times e^{3x}}{e^{4x} \times e^{-x}}$

Exercice 4:
Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^{-x+5}e^{2x+1}$
2. $B = \dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$
3. $C = \left(e^{x+1}\right)^2$
4. $D = \dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

Exercice 5:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x+1} = 1$
2. $e^{-x+3} = \dfrac{1}{e}$
3. $e^{2x+3} = e$
4. $e^{4x+1} = e^{x-2}$

Exercice 6:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$
3. $\left(e^{3x}\right)^2 \times e^{x+5} = 1$
4. $e^{1-x} - e^{2x} = 0$

Exercice 7:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x(e^x - 1) = 0$
2. $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$
3. $xe^{2x+1} = x$
4. $(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$

Exercice 8:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{6x+5} \geq 1$
2. $e^{-3x+5} > e$
3. $e^{-3x-1} \leq \left(e^4\right)^2$
4. $\dfrac{e^x \times \left(e^{-5}\right)^3}{\left(e^x\right)^2} \leq 1$

Exercice 9:
Calculer les dérivées des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{3x}(x + 2)$
2. $g(x) = e^{-x} - \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = 2e^{-x} + \cos(3x)$
4. $k(x) = \dfrac{5}{e^{4x}} + x^4$

Exercice 10:
Calculer les dérivées des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{5x - 4}{e^{4x}}$
2. $g(x) = e^{\frac{x}{3}} + x^4 - 2x^3$
3. $h(x) = 4e^{3x} \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$
4. $k(x) = e^{-2x} \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Exercice 11:
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2e^{3x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -5e^{0,2x}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 180e^{-\frac{x}{2}}$

Exercice 12:
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2e^{-2x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2e^{-2x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+8x-2+e^{0,4x}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3+4x-5}$

Exercice 13:
Pour chaque fonction f, déterminer les limites en $\pm\infty$, déterminer f' en étudiant son signe puis dresser le tableau de f.

1. $f(x)=(-x+5)e^x$
2. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{-x}}$
3. $f(x)=\dfrac{-2x+7}{e^{2x}}$
4. $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{9x+1}$

Exercice 14:
On considère la fonction $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer une expression de la dérivée de f.
2. Donner le tableau de signes de cette dérivée.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 15:
On considère la fonction $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$.

1. Donner le tableau de signes de f.
2. Dresser le tableau de variations de f après avoir calculé sa dérivée.

Exercice 16:
On considère les fonctions $f(x)=e^{2x}$ et $g(x)=e^{-3x}$.

1. Etablir les tableaux de variations des fonctions f et g.
2. Résoudre pour tout $x\in\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x)>f(x)$.

Exercice 17:
On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x-x+1$$

Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18:
On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2e^x$$

Etablir le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19:
On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(-x^2+3x-1)e^{-x}$$

1. Développer $(x-1)(x-4)$.
2. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20:
On considère la fonction $g(x)=\dfrac{e^{12x}}{x^3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $g'(x)=\dfrac{(12x-3)e^{12x}}{x^4}$.
2. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 21:
On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(x-2)e^{-2x}+3$$

1. Etablir le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction g.
   (a) Quelle quantité minimale doit être vendue pour réaliser un bénéfice ?
   (b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

Exercice 22:
Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C. A la fin de la cuisson, il est atteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + b \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$$

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four est de 1000°C.
2. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

Exercice 23:
La fonction :

$$f(x) = \frac{2+x}{e^x}$$

est la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$F(x) = \frac{ax+b}{e^x}$$

Déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 24:
On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 25:
Vérifier que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

1. $f(x) = xe^x$ et $F(x) = e^x(x-1)$
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ et $F(x) = -e^{-x}(x+1)$

Exercice 26:
Vérifier que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

1. $f(x) = e^x \sin(x)$ et $F(x) = e^x(\sin(x) - \cos(x))$
2. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{e^x}$ et $F(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

Exercice 27:
Calculer la valeur exacte de chaque intégrale, puis donner une valeur approchée à 0,01 près.

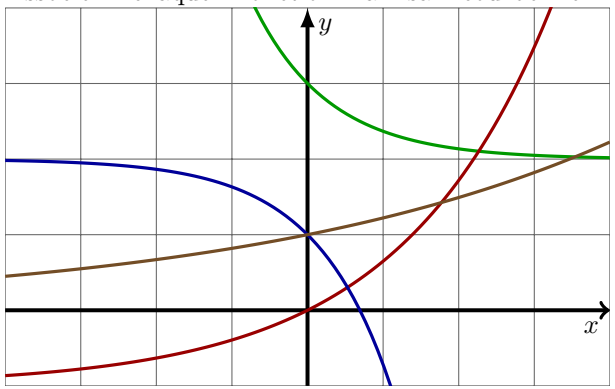
1. $\displaystyle\int_0^3 e^x \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^4 e^{0,25x} \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^2 e^{2x} \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{10} (e^{-0,1x} + 2x - 3) \, \mathrm{d}x$

Exercice 28:
Lors de la décharge d'un condensateur, la puissance fournie (en W) est donnée en fonction du temps (en s) par :

$$P(t) = \frac{(240e^{-8t})^2}{1\,000}$$

Calculer la puissance moyenne lors d'une décharge durant un dixième de seconde.

Exercice 29:
Associer chaque fonction à sa courbe en raisonnant sur les limites.



- $f(x) = e^{-x} + 2$
- $g(x) = e^{0,5x} - 1$
- $h(x) = -e^x + 2$
- $k(x) = e^{0,2x}$

Exercice 30:
Un condensateur de capacité C (en F) est relié à un conducteur ohmique de résistance R (en Ω). La tension (en V) aux bornes du condensateur est donnée en fonction du temps t (en s) par :

$$u(t) = 25e^{-\frac{t}{RC}}$$

1. (a) Calculer $u(0)$, la charge initiale du condensateur.
   (b) S'agit-il de la charge ou de la décharge du condensateur ?
2. On prend $R = 500\ \Omega$ et $C = 10\ \mu$F.
   Calculer la tension aux bornes du condensateur au bout d'un centième de seconde. Arrondir à 0,1 près.

Exercice 31:
La tension (en V) aux bornes d'un condensateur lors de sa charge est donnée en fonction du temps t (en s) par :

$$u(t) = 240(1 - e^{-40t})$$

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} 240e^{-40t}$.
   (b) Quelle semble être la charge maximale du condensateur ?
2. Calculer la fonction dérivée u' de u puis en déduire le tableau de variations de u sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer la charge moyenne du condensateur au cours de l'intervalle de temps $[0; t_c]$. Arrondir à l'unité.

Exercice 32:
Un robot suit un mouvement rectiligne. Sa position (en m) est donnée par son abscisse x en fonction du temps t (en s) par :

$$x(t) = 5(1 - e^{-t})$$

On admet que la vitesse du robot est donnée par la fonction dérivée x'.

1. Déterminer la vitesse initiale du robot et sa vitesse à l'instant $t = 6$. Donner la valeur exacte et une valeur approchée à $0,0001$ près.
2. Quelle est approximativement la distance maximale que va parcourir le robot ?

Exercice 33:
En chimie, on utilise le modèle de Verhulst pour des réactions autocatalytiques, dans lesquelles l'augmentation des individus touchés est proportionnelle à la fois au nombre d'individus déjà touchés et au nombre d'individus qui peuvent encore être touchés. Lors de la réaction des ions permanganates MnO_4^- avec l'acide oxalique $C_2H_2O_4$ autocatalysé par les ions Mn^{2+}, la concentration d'ions Mn^{2+} (en mmol/L) dans la solution est modélisée en fonction du temps t (en min) par :

$$c(t) = \frac{2,001}{1 + 2\ 000e^{-2,4t}}$$

1. Quelle est la concentration initiale d'ions Mn^{2+} dans la solution ?
2. Calculer la fonction dérivée $c'(t)$, étudier son signe et en déduire les variations de c sur $[0; +\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 34:
On pose une bille à la surface de l'eau.

1. La bille s'enfonce et sa vitesse (en m/s) au bout de t secondes est :

$$v(t) = 0,8(1 - e^{-10t})$$

   (a) Calculer $v(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de v, étudier son signe et dresser le tableau de variation de v.
2. On admet que la distance parcourue par la bille en t secondes est égale à :

$$x(t) = \int_0^t v(s)\ \mathrm{d}s$$

   . Calculer la distance parcourue par la bille en 10 secondes.

Exercice 35:
Le nombre d'élèves touchés par une épidémie de grippe dans un lycée est modélisé par :

$$f(t) = \frac{440}{2 + 20e^{-t}}$$

où t est le temps (en jours) après la découverte de l'épidémie.

1. Combien d'élèves étaient déjà infecté le jour où l'épidémie a été repérée ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer f', étudier son signe puis établir le tableau de variations de f.