Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Table des matières

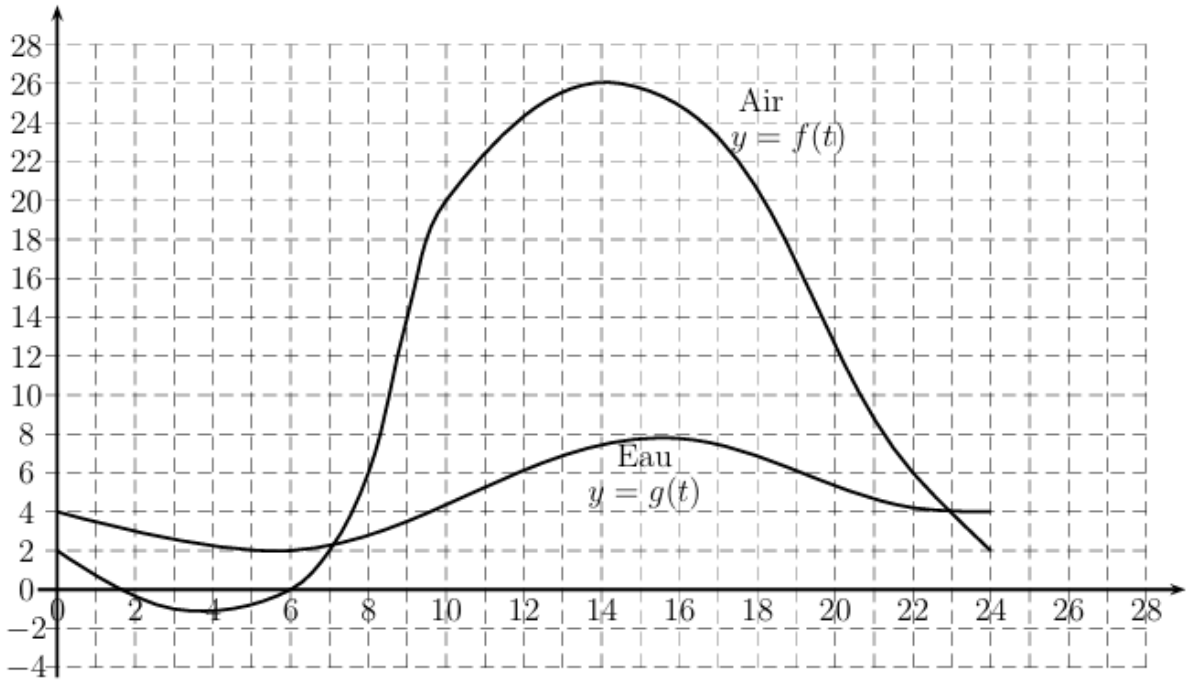
Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Introduction 3
2 Notions de fonction, d'image et d'antécédent 4
3 Résolutions graphiques 6
4 Variations, signes et extremums 6
5 Exercice bilan 8

Contenu

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation, entre deux valeurs de la variable x, d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$.
- Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

1 Introduction

Exercice 1:
A l'aide du graphique ci-dessous représentant les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.
On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable t.



1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

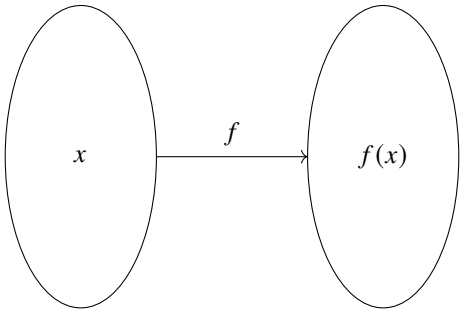
Langage mathématiques	**Langage courant**
$f(17) = 24$	A 17h, la température de l'air était de 24°C.
L'image de 6 par g est 2.	A 6h, la température....
Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure.....?
Le maximum de la fonction f est 26	
Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$	Entre 1h et 6h...
$f(7) = g(7)$	A 7h,.....
Résoudre $f(t) = g(t)$.	
f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

2. Traduire en langage mathématiques les phrases suivantes :

Langage courant	**Langage mathématiques**
A minuit, la température de l'eau était de 4°C.	
A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4°C?	
A 8h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
La température minimale de l'eau est de 2°C.	
Entre 6h et 15h, la température de l'eau monte.	

2 Notions de fonction, d'image et d'antécédent

Définition 1.
Définir une fonction f sur un ensemble de réels $\mathcal{D}_f$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel y.
Afin de bien comprendre que y dépend de x, on le note donc $y = f(x)$.



Définition 2.

- On appelle **domaine de définition** de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$, la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est **l'image** de x, x est un **antécédent** de y.
- On appelle **courbe représentative** d'une fonction f dans le plan, notés C_f, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.

Remarque 1.
Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

Remarque 2.
L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

Exercice 2:
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$;
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2-1}$;
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$;
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1}$;
- $f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2}$;

Remarque 3.
On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique.
Exemple : la fonction carré/cube/...

Méthode 1.

- Pour déterminer une image d'un réel a :
  - Graphiquement :

    On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.

  - Algébriquement :

    On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f.

- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :
  - Graphiquement :

    On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.

  - Algébriquement :

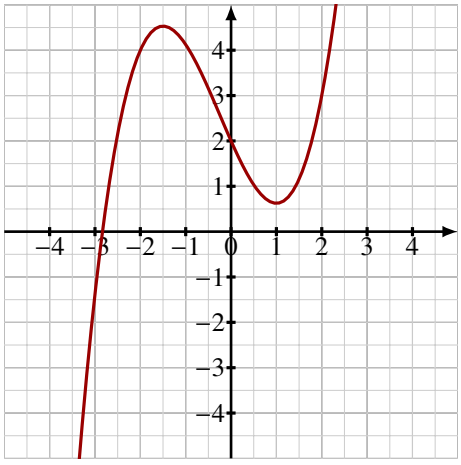
    On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

Exercice 3:
Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f.

Exercice 4:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. a. Déterminer l'image de 2 par f.

   b. Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f.

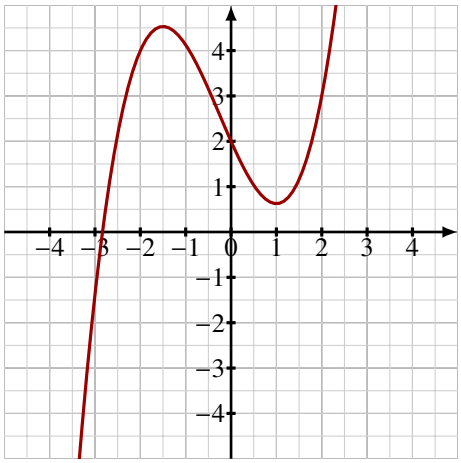
3 Résolutions graphiques

Méthode 2.

- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f.
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Exercice 5:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.

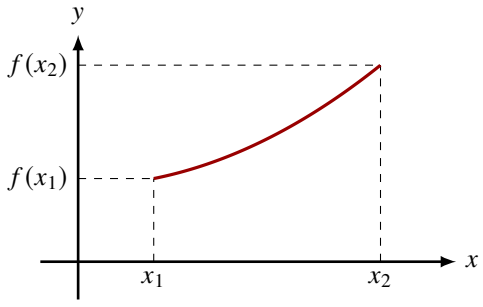


1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.

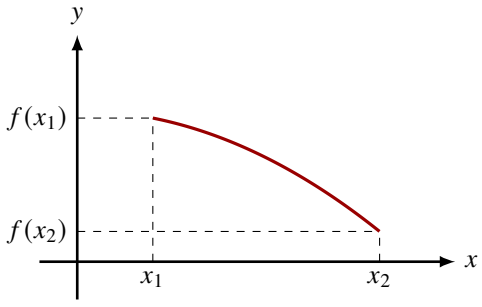
4 Variations, signes et extremums

Définition 3.
Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction quelconque.

- f est dite **croissante** si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite **décroissante** si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite **constante** si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Définition 4.
On appelle **tableau de variation** un résumé des variations d'une fonction f en fonction des valeurs de l'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 1:

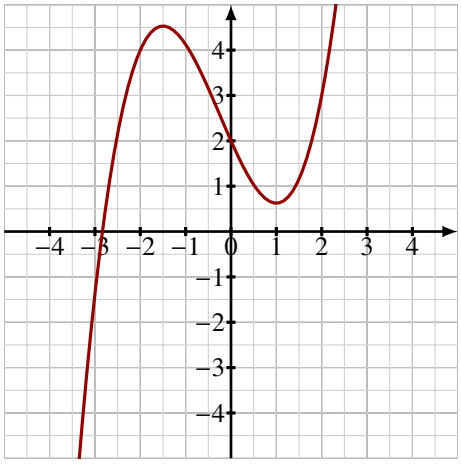
x	-2		0		4
$f(x)$	0	↗	4	↘	-3

Définition 5.
On appelle **tableau de signe** un résumé du signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de l'inconnu x.

Exemple 2:

x	-4		1		8
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 6:
Donner les tableaux de variation et de signe de la représentation graphique suivante :



Définition 6.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $c \in I$.

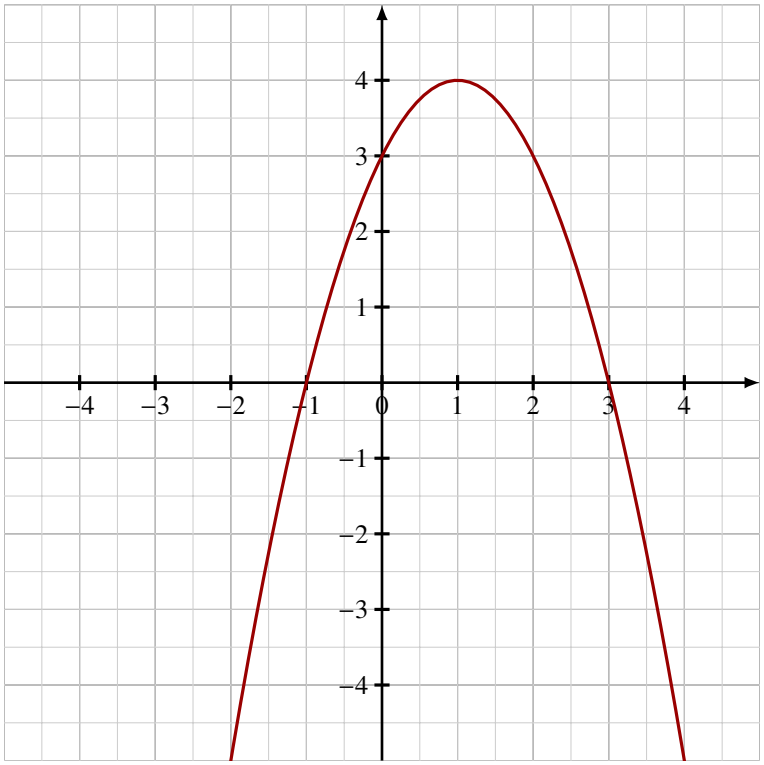
- $f(c)$ est un **maximum** pour la fonction f si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$.
- $f(c)$ est un **minimum** pour la fonction f si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

Exercice 7:
Donner le maximum et le minimum de la représentation graphique précédente sur les intervalles suivants:

- $[-4;5]$
- $[-2;1]$
- $[-3;-2]$

5 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5;5]$. La courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
   a. Déterminer l'image de 1 par f.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions 1.a. et 1.b. par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f.
4. Etablir le tableau de variation complet de f.
5. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.