Chapitre 9 : Suites arithmético-géométriques

Table des matières

Chapitre 9 : Suites arithmético-géométriques 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Suites arithmétiques 3
2 Suites géométriques 4
3 Exercice bilan 5

Contenu

- Relation de récurrence.
- Sens de variations.
- Représentation graphique.

1 Suites arithmétiques

Définition 1.
Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où r est un réel quelconque.
r s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple 1.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc :
  - $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$
  - $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc :
  - $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$
  - $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

Remarque 1.
La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriété 1.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple 2.

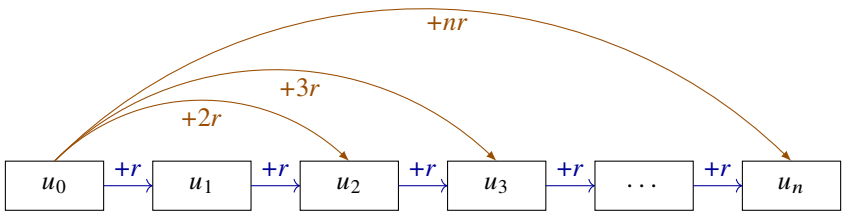
- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété 2.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple 3.

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

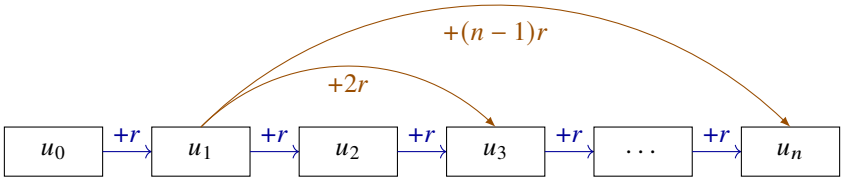


Remarque 2.
Il est possible que le premier terme ne soit pas u_0. On effectue alors un décalage d'indice :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

En effet, pour passer de u_1 à u_n on additionne $(n-1)$ fois la raison.

Exemple 4.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 5$.
On a $u_n = 5 + (n-1) \times 2$.



2 Suites géométriques

Définition 2.
Une suite (u_n) est dite **géométrique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q est un réel quelconque strictement positif.
q s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple 5.

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc :
  - $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
  - $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc :
  - $v_1 = q \times v_0 = 200 \times 0,5 = 100$
  - $v_2 = q \times v_1 = 100 \times 0,5 = 50$

Remarque 3.
La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriété 3.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple 6.

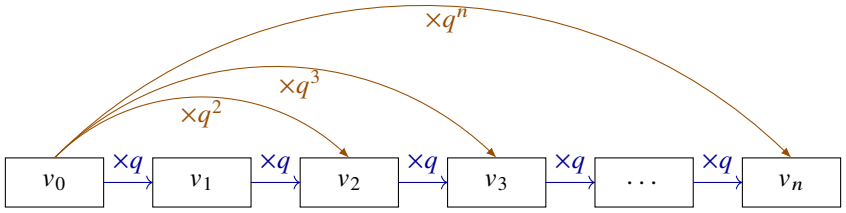
- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété 4.
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple 7.

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

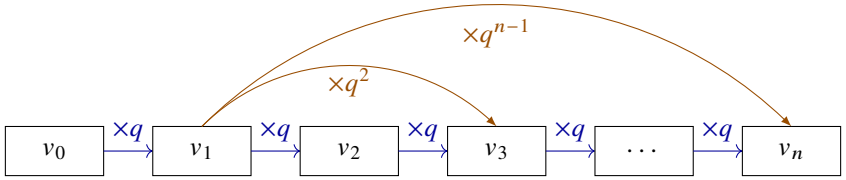


Remarque 4.
Il est possible que le premier terme ne soit pas v_0. On effectue alors un décalage d'indice :

$$u_n = v_1 \times q^{n-1}$$

En effet, pour passer de u_1 à u_n on multiplie $(n-1)$ fois la raison.

Exemple 8.
Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 5$.
On a $v_n = 5 \times 2^{n-1}$.



3 Exercice bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 5$ et $u_5 = 10$.
   a. Déterminer sa raison r.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c. Déterminer le sens de variation de (u_n).
   d. Calculer u_0.
   e. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_2 = 5$ et $v_5 = 10$.
   a. Déterminer sa raison q.
   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c. Déterminer le sens de variation de (v_n).