Chapitre 11 : Dérivation

Table des matières

Chapitre 11 : Dérivation 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Fonction dérivée 3
2 Opérations sur les dérivées 3
3 Application à l'étude des variations d'une fonction 4
4 Exercice bilan 4

Contenu

- fonction dérivée ;
- fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3$;
- dérivée d'une somme, dérivée de $kf (k \in \mathbb{R})$, dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ;
- sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée ;
- tableau de variations, extremums.

1 Fonction dérivée

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point de I.
On définit alors la fonction dérivée de f, noté f', qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

Remarque 1.
La dérivée f' de f définit donc bien une fonction, son ensemble de définition est appelé ensemble de dérivation de f.

On définit donc la fonction dérivée telle que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemple 1:
On va chercher à déterminer la dérivée de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Donc :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

En effectuant exactement le même processus de calcul, on peut déterminer des dérivées d'autres fonctions usuelles.

Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exercice 1:
Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x$
- $g(x) = 2x^2$
- $h(x) = 7$
- $p(x) = x^3$

2 Opérations sur les dérivées

Propriété 1.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(ku)' = ku'$;

Exercice 2:
Déterminer la dérivée de la fonction f définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

3 Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème 1.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Soit $a \in I$, si $f'(a) = 0$ et f change de signe en a, alors a est un extremum de f (maximum ou minimum).

Exemple 2:
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f.
  On a $f'(x) = 4x + 8$
- On étudie le signe de cette dérivée.
  On a $f' < 0$ sur $]-\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $]-2; +\infty[$
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
  On a f strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$
- On trace le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f.
  On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x-3)$.
3. Etablir le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.