Chapitre 13 : Variables aléatoires

Table des matières

Chapitre 13 : Variables aléatoires 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Introduction 3
2 Lois de probabilité et espérance 3
3 Lois de Bernoulli 4
4 Exercice bilan 5

Contenu

- Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance.
- Loi de Bernoulli $(0, 1)$ de paramètre p, espérance.

1 Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacuns leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 4, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable X qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur de possible de cette somme a une probabilité qui lui est associé. (probabilité de faire 2,3,4...)
On convient de dire que X est une variable aléatoire.

Définition 1.
Soit une expérience aléatoire donnée d'univers Ω. On définit une **variable aléatoire** X sur Ω si à tout élément de Ω on associe un élément de $\mathbb{R}$.

En notant $E = \{x_1, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X, on va noter $\{X = x_i\}$ l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel x_i.

Remarque 1.
En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :
$\{X = 8\} \longleftrightarrow$ "La somme des deux dés est égale à 8".

On peut de même définir l'évènement:
$\{X \leq 8\} \longleftrightarrow$: "La somme des deux dés est inférieure ou égale à 8".

C'est une sorte de "traduction" du langage courant en langage mathématiques.

Exemple 1:
On prend pour autre exemple un sac contenant cinqs billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro, une bleues 4 euros. On peut définir alors une variable aléatoire X qui prendra les valeurs du gain à savoir $E = \{-10, 1, 4\}$.

2 Lois de probabilité et espérance

Définition 2.
Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $E = \{x_1, ..., x_n\}$.
On définit la **loi de probabilité** $\mathbb{P}_X$ associé à cet événement : $\mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$
Il est possible de représenter une loi de probabilité par un tableau :

x_i	x_1	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	p_1	...	p_n

Exemple 2:
En reprenant l'exemple précédent des billes, on a $E = \{-10, 1, 4\}$ et :

$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5}$; $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}$; $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5}$;

En représentant ces données dans un tableau on a :

x	-10	1	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

On connaît donc le formalisme adéquat à la représentation d'expérience aléatoire. Dans l'exemple précédent, on a donc les probabilités de gain, mais alors qu'est ce que ça nous dit ? On aimerait bien savoir si le jeu est favorable ou pas, c'est-à-dire si j'ai en moyenne plus de chance de gagner ou de perdre.

Définition 3.
Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $E = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On définit **l'espérance** de la variable aléatoire X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + ... + x_n \mathbb{P}(X = x_n)$$

Remarque 2.
L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple 3:
En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \mathbb{P}(X = -10) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) = -10 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = 0$$

3 Lois de Bernoulli

Définition 4.
Soit Ω l'univers des possibilités d'une épreuve de Bernoulli de paramètres p. On appelle variable aléatoire de succès la fonction S, définie sur Ω, qui à chaque issue associe 1 s'il s'agit d'un succès ou 0 s'il s'agit d'un échec.
On dit que S suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Exemple 4:
Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a :

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,5 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 0,5$$

Propriété 1.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a l'espérance de X qui est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Exemple 5:
Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0,5$$

4 Exercice bilan

Un joueur lance trois fois de suite une pièce truquée qui a 60% de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de Face obtenu sur trois lancers.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Décrire l'événement $\{X < 3\}$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.