Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Table des matières

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Définitions 3
2 Résolutions graphiques 4
3 Variations, signes et extremums 5
4 Exercice bilan 6

Contenu

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation, entre deux valeurs de la variable x, d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$.
- Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

1 Définitions

Définition 1.

- On appelle **domaine de définition** de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$,la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est **l'image** de x, x est un **antécédent** de y.
- On appelle **courbe représentative** d'une fonction f dans le plan, notée C_f, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

Remarque 1.
Il ne faut pas confondre f et $f(x)$!
f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

Remarque 2.
On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique.

Méthode 1.

- Pour déterminer une image d'un réel a :
  - Graphiquement :

    On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.
  - Algébriquement :

    On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f.
- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :
  - Graphiquement :

    On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.
  - Algébriquement :

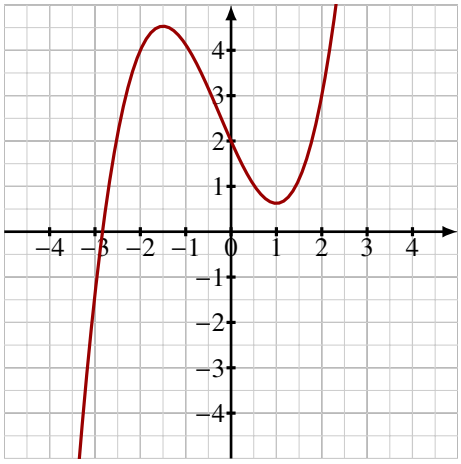
    On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

Exercice 1:
Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f.

Exercice 2:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. a. Déterminer l'image de 2 par f.

   b. Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f.

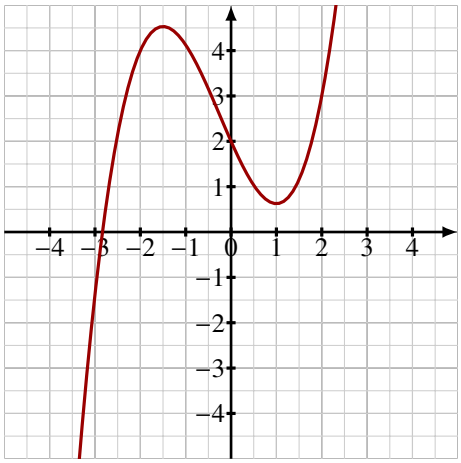
2 Résolutions graphiques

Méthode 2.

- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f.
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Exercice 3:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.

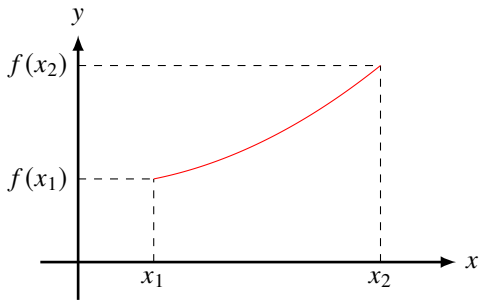


1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.

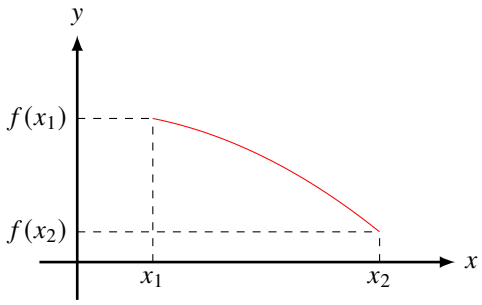
3 Variations, signes et extremums

Définition 2.
Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction quelconque.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Théorème 1.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

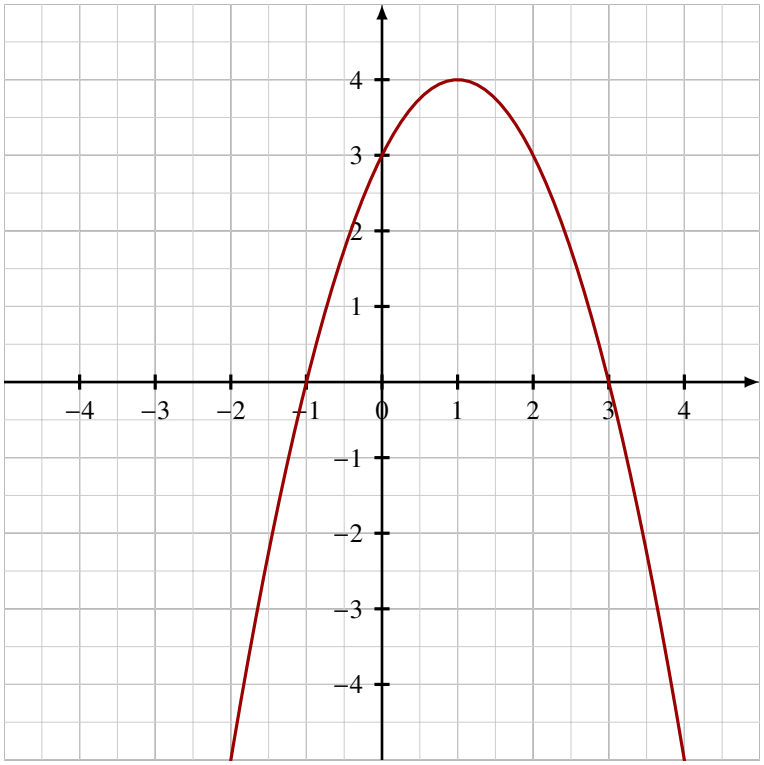
On rappelle les dérivées de fonctions usuelles vues en classe de Première :

Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
$f(x) = ax^3, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3ax^2$

Exercice 4:
Etablir le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

4 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5;5]$. La courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
   a. Déterminer l'image de 1 par f.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions 1.a. et 1.b. par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f.
4. Développer $f(x)$ puis déterminer l'expression de $f'(x)$.
5. Etablir le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation complet de f.
6. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.