Chapitre 2 : Suites numériques

Table des matières

Chapitre 2 : Suites numériques 1
Axel CARPENTIER
Contenue 2
1 Suites arithmétiques 3
2 Suites géométriques 4
3 Exercice Bilan 5

Contenue

- Suites arithmétiques : moyenne arithmétique de deux nombres, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite arithmétique , notation $\sum$.
- Suites géométriques : moyenne géométrique de deux nombres positifs, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite géométrique , notation $\sum$.

1 Suites arithmétiques

Définition 1.
Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où r est un réel quelconque.
r s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple 1:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc :
  - $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$
  - $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc :
  - $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$
  - $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

Remarque 1
La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriété 1.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple 2:

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété 2.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple 3:

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

Propriété 3.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2} \text{Nombre de terme} \times \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}$$

Exemple 4: Exemple 5:

- Pour (u_n) définie par $u_n = 5n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{5} u_k = 6 \times \frac{u_0 + u_5}{2} = 6 \times \frac{0 + 25}{2} = 75$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 7 - 1,5n$, on a :

$$\sum_{k=3}^{5} v_k = 3 \times \frac{v_3 + v_5}{2} = 3 \times \frac{2,5 - 0,5}{2} = 3$$

2 Suites géométriques

Définition 2.
Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q est un réel quelconque strictement positif.
q s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple 6:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc :
  - $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
  - $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc :
  - $v_1 = q \times v_0 = 200 \times 0,5 = 100$
  - $v_2 = q \times v_1 = 100 \times 0,5 = 50$

Remarque 2
La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriété 4.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple 7:

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple 8:

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

Propriété 5.
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple 9:

- Pour (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{5} u_k = 3 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 3 \times 63 = 189$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 200 \times 0,5^n$, on a :

$$\sum_{k=3}^{5} v_k = 25 \times \frac{1-0,5^5}{1-0,5} = 48,4375$$

3 Exercice Bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 25$.
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Calculer $\sum_{k=0}^{14} u_k$.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 30$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Calculer $\sum_{k=1}^{50} v_k$.