Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles

Table des matières

Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Probabilité conditionnelle 3
2 Indépendance 3
3 Arbre de probabilités 4
4 Exercice bilan 5

Contenu

- Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.
- Indépendance de deux événements de probabilités non nulles.
- Formule des probabilités totales pour une partition de l'univers.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1.
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété 1.
Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

Exemple 1:
Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les événements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,3}{0.6} = 0,5$
La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

Remarque 1.
Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont aucunes raisons d'être égales.

2 Indépendance

Définition 2.
Deux événements A et B sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

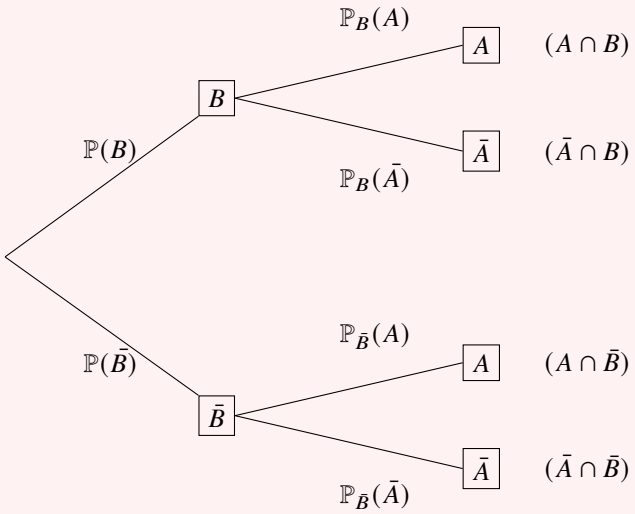
C'est-à-dire si :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Exercice 1:
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
On considère les événements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux événements sont-ils indépendants ?

3 Arbre de probabilités

Définition 3.
Considérons une expérience aléatoire quelconque d'univers Ω et deux événements A et B.
Il est possible de représenter les possibilités de l'expérience aléatoire par un arbre de probabilité :



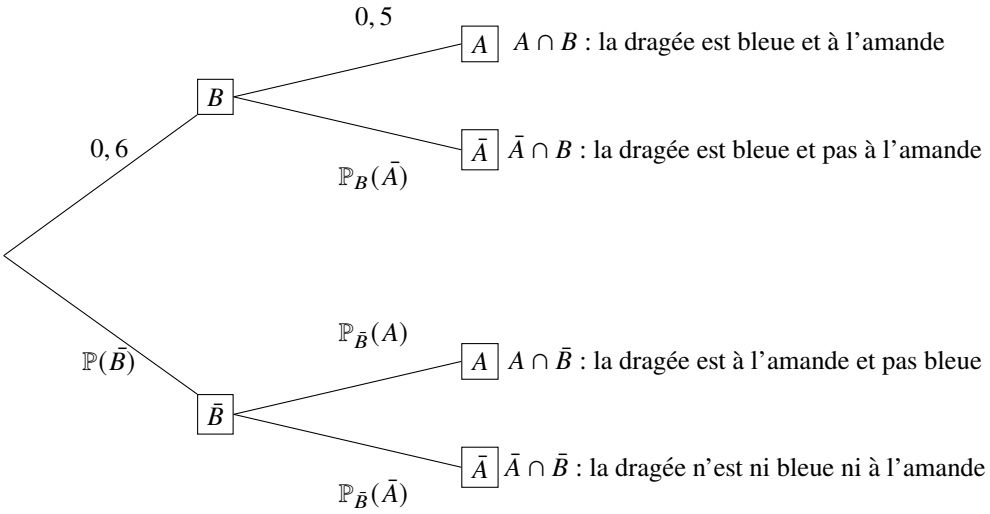
- Une **branche** (ou segment) représente une probabilité, conditionnelle à partir du premier événement.
- Un **noeud** est une jonction entre deux branches, représentant un événement conditionnant un autre.
- Un **chemin** est un événement finalement réalisé, en suivant des branches successives.

Propriété 2.

- La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités associées à ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Exemple 2:
On reprend l'exemple précédent :



On en déduit : $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,4$ et $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 0,5$ et on retrouve les résultats précédemment trouvés.

Propriété 3. *Formule des probabilités totales*
Soit A_1, A_2, A_3 des événements deux à deux disjoints et B un évènement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B)$$

4 Exercice bilan

Un site internet a une audience séparée en deux types : les respectueux qui représentent 90% des inscrits et les trolls 10%. Les premiers ont une probabilité de 0, 1 de participer à une discussion houleuse sur une journée, les seconds 0, 7.
Un nouvel utilisateur s'inscrit. On définit les événements suivants :

- T : "le nouvel arrivant est un troll".
- H : "Le nouvel arrivant participe à une discussion houleuse".

Construire un arbre pondéré réprésentant la situation puis calculer $\mathbb{P}(H)$.