Chapitre 5 : Fonction logarithme décimal

Table des matières

Chapitre 5 : Fonction logarithme décimal 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Définition 3
2 Représentation graphique et sens de variation 3
3 Propriétés algébriques 4
4 Exercice bilan 4

Contenu

- Définition du logarithme décimal de b pour $b > 0$ comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$; notation log.
- Propriétés algébriques : $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a^n) = n\log(a)$.
- Sens de variation.

1 Définition

Définition 1.
Soit a un nombre réel strictement positif. Le **logarithme décimal** de a, noté $\log(a)$, est l'unique nombre b tel que :

$$10^b = a$$

Remarque 1.

- On a $10^0 = 1$ donc $\log(1) = 0$.
- On a $10^1 = 10$ donc $\log(10) = 1$.

Propriété 1.
Soit a un nombre réel strictement positif.

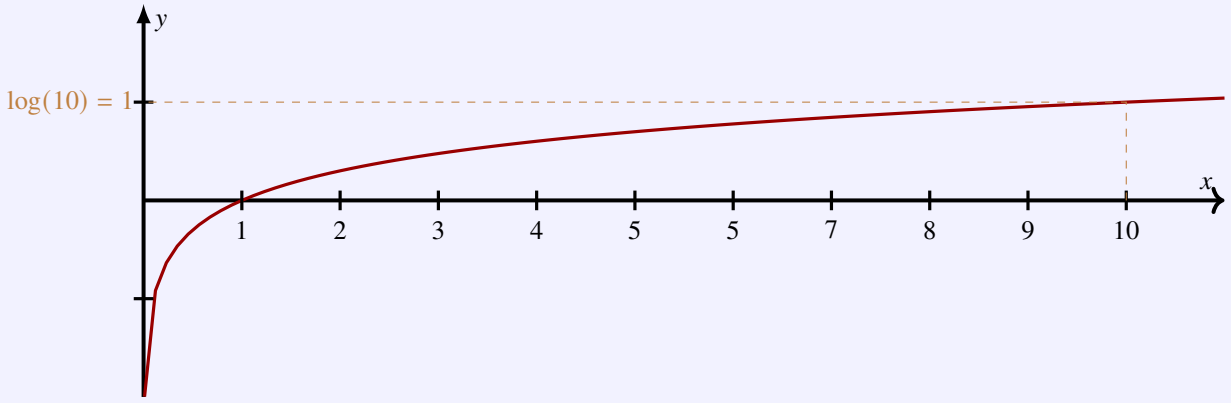
$$b = \log(a) \iff 10^b = a$$

On peut donc généraliser ce résultat à tous les réels strictement positifs.

Définition 2.
On définit la fonction logarithme décimal log : $x \mapsto \log(x)$ définie sur $]0; +\infty[$.

2 Représentation graphique et sens de variation

Propriété 2.
La fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.



Propriété 3.
Soit a un nombre réel strictement positif.

- Si $0 < a < 1$, $\log(a) < 0$.
- Si $a > 1$, $\log(a) > 0$

3 Propriétés algébriques

Propriété 4.
Soit a, b deux réels strictement positifs. On a :

$$\log(a) = \log(b) \iff a = b \quad \text{et} \quad \log(a) < \log(b) \iff a < b$$

Exercice 1:
Résoudre les (in)équations suivantes :

- $\log(x + 2) = \log(5)$
- $\log(2x + 6) \leq \log(x - 4)$

Propriété 5.
Soit a, b deux réels strictement positifs et x un réel quelconque :

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^x) = x\log(a)$

Exercice 2:
Simplifier l'expression :

$$A = \log(10^{12}) - \log(10^4) + \log\left(\frac{1}{10^3}\right)$$

4 Exercice bilan

Le prix d'un équipement pour les handicapés est $P_0 = 1\,000$ euros et baisse chaque année de 5%. Au bout de combien d'années le prix de cet équipement deviendra-t-il inférieur à 800 euros ?