Chapitre 6 : Variables aléatoires

Table des matières

Chapitre 6 : Variables aléatoires 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Introduction 3
2 Lois de probabilité et espérance 4
3 Loi de Bernoulli 5
4 Loi binomiale 5
5 Exercice bilan 6

Contenu

- Espérance d'une variable aléatoire discrète.
- Loi de binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, espérance.
- Coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

1 Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacuns leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 5, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable X qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur de possible de cette somme a une probabilité qui lui est associé. (probabilité de faire 2, 3, 4, . . .)
On convient de dire que X est une variable aléatoire.

Définition 1.
Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

Exemple 1:
Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

Définition 2.

- On note $E = \{x_1, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
- On note $\{X = x_i\}$ l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel x_i

Exemple 2:
En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :

$$\{X = 8\} \longleftrightarrow \text{"La somme des deux dés est égale à 8".}$$

Exercice 1:
On considère un sac contenant cinqs billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro et une bleue gagner 4 euros.
On définit alors la variable aléatoire X qui associe les valeurs du gain.

1. Déterminer l'univers Ω.
2. Déterminer l'ensemble E des valeurs prises par X.

2 Lois de probabilité et espérance

Définition 3.
La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction $\mathbb{P}$ qui a chaque valeur associe sa probabilité.

Remarque 1.
En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées.

Dans tout le reste du chapitre, on considèrera la variable aléatoire discrète de loi :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple 3:
En reprenant l'exemple précédent des billes, on a $E = \{-10, 1, 4\}$ et :

$$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5}\ ; \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}\ ; \qquad \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5}\ ;$$

En représentant ces données dans un tableau on a :

x	-10	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Exercice 2:
On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi, X vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

Déterminer la loi de probabilité de X.

On connaît donc le formalisme adéquat à la représentation d'expérience aléatoire. Dans l'exemple précédent, on a donc les probabilités de gain, mais alors qu'est ce que ça nous dit ? On aimerait bien savoir si le jeu est favorable ou pas, c'est-à-dire si j'ai en moyenne plus de chance de gagner ou de perdre.

Définition 4.
Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $E = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On définit **l'espérance** de la variable aléatoire X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + ... + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$

Remarque 2.
L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple 4:
En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient:

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \mathbb{P}(X = -10) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) = -10 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = 0$$

3 Loi de Bernoulli

Définition 5.
Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée "succès" qui a pour probabilité p, l'autre appelée "échec" qui a pour probabilité $q = 1 - p$.
Définir une **loi de Bernoulli de paramètre** p, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple 5:
Si on lance un dé et qu'on nomme "succès" l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété 1.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a l'espérance de x qui est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Exemple 6:
Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0,5$$

4 Loi binomiale

Définition 6.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. On dit qu'une variable suit une **loi bibomiale** de paramètre n et p, noté $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, lorsque X compte le nombre de succès obtenus pour n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 2.
Soient $k \leq n$, $p \in [0;1]$. Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ si on a :

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple 7:
Si $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$, on a :

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$$

Propriété 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n;p)$. On a :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

5 Exercice bilan

On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à $0,12$. On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien d'embauche parmi les dix.

1. Etablir la loi de probabilité de X. Quelle loi reconnaît-on ?
2. Calculer l'espérance de X et interpréter dans le contexte de l'énoncé.