Chapitre 1 : Intégration

Table des matières

Chapitre 1 : Intégration 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Intégrale d'une fonction 3
1.1 Définition 3
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire 3
2 Propriétés de l'intégrale 5
2.1 Relation de Chasles 5
2.2 Linéarité 6
2.3 Inégalités 6
2.4 Valeur moyenne 7
3 Exercice bilan 7

Contenu

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)dx$
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles. Mise en relation des écritures $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ et $\int_a^b f(x)dx$.
- Définition de l'intégrale d'une fonction négative sur [a;b] ; extension aux fonctions ne gardant pas un signe constant.
- Définition de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $a < b$.
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Intégrale dépendant de sa borne supérieure : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Définition

Définition 1.
On appelle **intégrale** de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 1:
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 x\,\mathrm{d}x$.

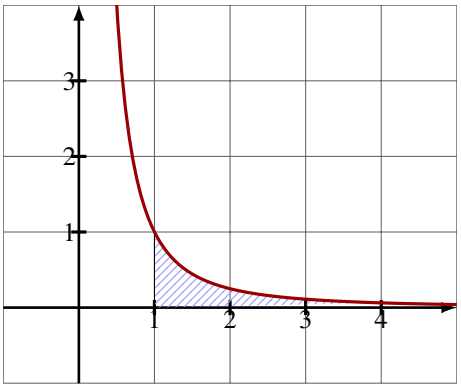
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire

1.2.1 Aire d'une fonction positive

Définition 2.
Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice 2:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^2}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ d'unité graphique 1 cm.

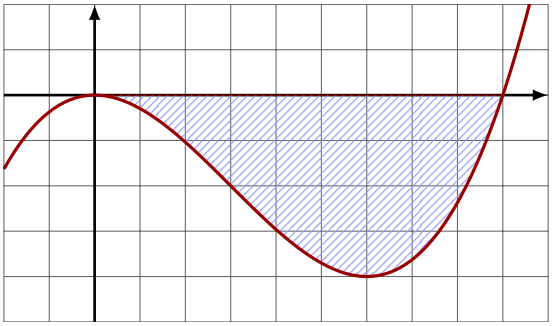


1.2.2 Aire d'une fonction négative

Définition 3.
Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice 3:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

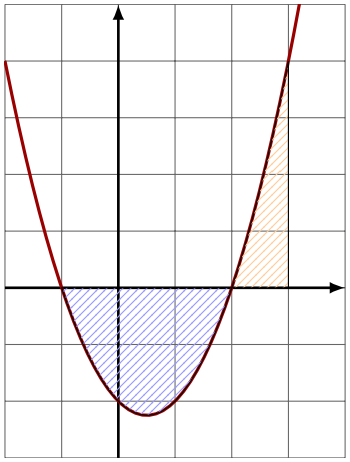


1.2.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

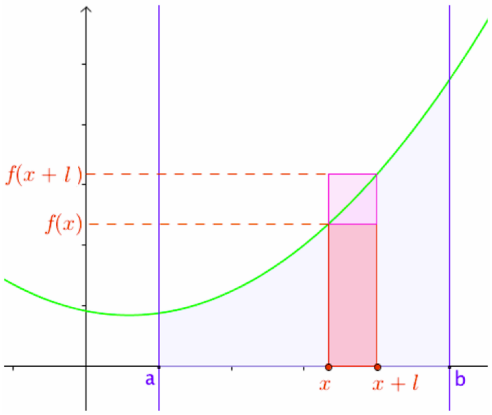
Exercice 4:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



1.2.4 Méthode des rectangles

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.
On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :



- l'un de dimensions l et $f(x)$ d'aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimensions l et $f(x+l)$ d'aire $l \times f(x+l)$.

Sur l'intervalle $[a;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs". Voici un algorithme écrit en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

```
1  def integrale(f,a,b,n):
2      longueur = (b - a) / n
3      aire_inf , aire_sup = 0 , 0
4      for k in range (n):
5          aire_inf = aire_inf + longueur * f(a + k * longueur )
6          aire_sup = aire_sup + longueur * f(a + (k+1) * longueur )
7      return aire_inf , aire_sup
8
9  aire_inf , aire_sup = integrale( lambda x: x*x , 0 , 1 , 100 )
10 print("{} < integrale < {}".format(aire_inf,aire_sup))
```

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Relation de Chasles

Propriété 1. *Relation de Chasles*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x & \text{si } x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1;4] \end{cases}$.

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

2.2 Linéarité

Propriété 2.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + x\,\mathrm{d}x$.

2.3 Inégalités

Propriété 3.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Propriété 4.
Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 7:

Démontrer que $\displaystyle\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \leq 8$.

2.4 Valeur moyenne

Définition 4.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ non trivial. On appelle **valeur moyenne** de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 8:
Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$.

3 Exercice bilan

Soit f définie pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ par $\begin{cases} \sin\left(4x+\dfrac{4\pi}{5}\right) & \text{si } x \in [-\pi;0] \\ \cos(3x) & \text{si } \quad x \in]0;\pi] \end{cases}$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[-\pi;\pi]$.