Chapitre 3 : Equations différentielles

Table des matières

Chapitre 3 : Equations différentielles 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Définition et introduction 3
2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ 3
3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ 4
4 Exercice bilan 5

Contenu

- Notion d'équation différentielle ; notion de solution.
- Équations différentielles du type $y' = ay$; $y' = ay + b$.

1 Définition et introduction

Définition 1.
Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue (souvent notée y), ses dérivées et éventuellement d'autres fonctions. L'inconnue recherchée est donc une **fonction**.

Exemple 1:
Résoudre $y' - y = 0$, signifie trouver toutes les **fonctions** y telles que $y'(x) - y(x) = 0$ quelque que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1:
Vérifier que la fonction $f : x \mapsto e^x$ est une solution de cette équation.

Exercice 2:

1. On considère l'équation différentielle $y' = 2y$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ est une solution de cette équation différentielle.
2. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est-elle une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$?
3. On considère l'équation différentielle $2y' + y = h$, où $h : x \mapsto 3x^2 - 7x + 9$. La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$ est-elle une solution de cette équation différentielle ?

2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Définition 2.
L'équation :

$$(E_0) : \qquad y' = ay$$

est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Exemple 2:

- $y' = 5y$
- $2y' + 9y = 0$

Théorème 1.

- Les solutions de (E_0) sont données par les fonctions :

$$y : x \mapsto Ce^{ax} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E_0) sachant que $y(x_0) = y_0$.

Remarque 1.
Le deuxième point définit une condition initiale. Sans cette condition initiale, il n'y pas unicité de la solution.

Exercice 3:
On considère l'équation différentielle $2y' + 9y = 0$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = 1$.

Propriété 1.
Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) et $k \in \mathbb{R}$. $y_1 + y_2$ et ky_1 sont alors également solutions de (E_0).

3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition 3.
L'équation :

$$(E) : \qquad y' = ay + b$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété 2.
Les solutions de (E) sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 2$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = -\frac{1}{3}$

4 Exercice bilan

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{90}y + \frac{7}{30}$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 7$.