Chapitre 5 : Composition de fonctions

Table des matières

Chapitre 5 : Composition de fonctions 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Définitions 3
2 Dérivation de fonctions composées 3
2.1 Cas particuliers 3
2.2 Cas général 4
3 Primitivation de fonctions composées 5
4 Exercice bilan 5

Contenu

- Définition de la composée de deux fonctions ; notation $v \circ u$.
- Dérivée de la composée de deux fonctions : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.
- Expression d'une primitive de $u' f(u)$ en fonction d'une primitive de f et de la fonction u.

1 Définitions

Définition 1.
On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Exemple 1:
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x-3}$. C'est la composée de deux fonctions u et v :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x - 3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

On a $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et donc f :

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x-3) = \sqrt{x-3}$$

Exercice 1:
Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Identifier la composition de deux fonctions dans la fonction f.

Exercice 2:
Soient $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Déterminer l'expression des fonctions $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

2 Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Dérivée**
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice 3:
Soit $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f.

2.2 Cas général

Propriété 1.
On a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

.

Exercice 4:
Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $g(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^3$
- $h(x) = \dfrac{x^2-6}{2x+5}$

3 Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif des primitives des fonctions usuelles :

	Fonction f	**Primitive** F
Constante	$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega x + \phi) + k$ sur $I = \mathbb{R}$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Primitive**
$f(ax + b)$	$\dfrac{1}{a}F(ax + b)$ où F est une primitive de f.
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Exercice 5:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$
- $g(x) = xe^{x^2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x - 1)$

4 Exercice bilan

Soit $f(x) = (2x - 6)(x^2 - 6x + 7)^{17}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx$.