Chapitre 6 : Nombres complexes (forme exponentielle)

Table des matières

Chapitre 6 : Nombres complexes (forme exponentielle) 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Rappels 3
1.1 Forme algébrique 3
1.2 Conjugé d'un nombre complexe 3
1.3 Module d'un nombre complexe 3
1.4 Argument d'un nombre complexe 4
1.5 Forme trigonométrique 4
2 Forme exponentielle d'un nombre complexe 4
2.1 Définition 4
2.2 Propriétés 5
3 Formules de trigonométrie 5
3.1 Formules d'addition 5
3.2 Formules de duplication 6
3.3 Formules de linéarisation 7
4 Expression complexe de transformations 7
5 Exercice bilan 7

Contenu

- Exponentielle complexe : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$;
- Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$;
- Formules d'addition et de duplication des sinus et des cosinus.
- Linéarisation de $\cos^2(\theta)$ et de $\sin^2(\theta)$, application aux calculs de primitives ;
- Expression complexe des translations, rotations et homothéties.

1 Rappels

1.1 Forme algébrique

Définition 1.
On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture :

$$z = a + ib$$

avec a, b deux réels.

Exemple 1:

- $z_1 = 4 + 5i$
- $z_2 = -2i$
- $z_3 = -4$

1.2 Conjugé d'un nombre complexe

Définition 2.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 2:
Le conjugué de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ est $\overline{z_1} = \frac{1}{2} + 3i$.

1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 3.
Soit $z = a + ib$. On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple 3:

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$
- $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

1.4 Argument d'un nombre complexe

Définition 4.
Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, un **argument** de z est un nombre réel, noté $\arg(z)$ ou θ, tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple 4:

- $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arg(-1) = \pi$
- $\arg(2) = 0$

1.5 Forme trigonométrique

Définition 5.
Soit z un nombre complexe non nul dont on note le module $|z|$ et un argument θ, une écriture trigonométrique de z est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Exercice 1:

1. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - i$.
2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z_2 = 4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

2.1 Définition

Définition 6.
Pour tout réel θ on a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exemple 5:

- $e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$

Définition 7.
Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta}$$

Exercice 2:

1. Ecrire les nombres complexes suivants sous leur forme exponentielle.

   a. $z_1 = -2i$ b. $z_2 = -3$ c. $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

2. Ecrire les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique.

   a. $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b. $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.2 Propriétés

Propriété 1.
Soient θ et θ' deux réels :

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercice 3:

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

   a. iz b. $i\bar{z}$ c. $-\dfrac{2i}{z}$

3 Formules de trigonométrie

3.1 Formules d'addition

Propriété 2.
Soient a, b deux réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Remarque 1.
En remplaçant b par $-b$ précédemment et on obtient :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Exercice 4:
Soit $f : t \mapsto \sqrt{3}\cos(3t) + \sin(3t)$, écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = A\cos(3t+\phi)$ avec A et ϕ à déterminer.

Exercice 5:
Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

3.2 Formules de duplication

Propriété 3.
Soit a un réel, on a:

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Exercice 6:
Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.

3.3 Formules de linéarisation

Propriété 4.
Soit a un réel, on a:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$$

Exercice 7:
Déterminer une primitive des fonctions $x \mapsto \cos^2(x)$ et $x \mapsto \sin^2(x)$.

4 Expression complexe de transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$. La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
On retrouve les transformations du plan usuelles dans le tableau ci-dessous :

Transformation	Définition	Fonction associée
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$
Homothétie de centre O de rapport a	$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$
Rotation de centre O d'angle θ	$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta}z$

Exercice 8:
Soient f, g, h définies par :

- $f : z \mapsto (1-i)(1+i)z$
- $g : x \mapsto z - 2i$
- $h : z \mapsto -e^{i\frac{\pi}{3}}z$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction. On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

5 Exercice bilan

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3} - i$.
2. Soit $f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Déterminer A et ϕ tels que $f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \phi\right)$.
3. Exprimer $\cos^4(t)$ en fonction de $\cos(2t)$ et $\cos(4t)$.