Chapitre 2 : Suites numériques

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Tronc commun

Table des matières

1. Suites arithmétiques

2. Suites géométriques

3. Exercice bilan

Suites arithmétiques

1. Suites arithmétiques

2. Suites géométriques

3. Exercice bilan

Suites arithmétiques

Définition 1.

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où r est un réel quelconque.
r s'appelle la **raison** de la suite (u_n).

Exemple 1:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc :
  - $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$
  - $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc :
  - $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$
  - $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

Suites arithmétiques

Propriété 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout entier n, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple 2:

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.

Suites arithmétiques

Propriété 2.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple 3:

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

Suites arithmétiques

Propriété 3.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \text{Nombre de terme} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Suites arithmétiques

Exemple 4:

- Pour (u_n) définie par $u_n = 5n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{5} u_k = 6 \times \frac{u_0 + u_5}{2} = 6 \times \frac{0 + 25}{2} = 75$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 7 - 1,5n$, on a :

$$\sum_{k=3}^{5} v_k = 3 \times \frac{v_3 + v_5}{2} = 3 \times \frac{2,5 - 0,5}{2} = 3$$

Suites géométriques

1. Suites arithmétiques

2. Suites géométriques

3. Exercice bilan

Suites géométriques

Définition 2.

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q est un réel quelconque strictement positif.
q s'appelle la **raison** de la suite (u_n).

Exemple 5:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc :
  - $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
  - $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc :
  - $v_1 = q \times v_0 = 200 \times 0,5 = 100$
  - $v_2 = q \times v_1 = 100 \times 0,5 = 50$

Suites géométriques

Propriété 4.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout entier n, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple 6:

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Suites géométriques

Propriété 5.

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a que pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple 7:

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

Suites géométriques

Propriété 6.

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

Suites géométriques

Exemple 8:

- Pour (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{5} u_k = 3 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 3 \times 63 = 189$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 200 \times 0,5^n$, on a :

$$\sum_{k=3}^{5} v_k = 25 \times \frac{1-0,5^5}{1-0,5} = 48,4375$$

Exercice bilan

1. Suites arithmétiques

2. Suites géométriques

3. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 25$.
   - 1.1 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   - 1.2 En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - 1.3 Calculer $\sum_{k=1}^{3} u_k$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 30$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
   - 2.1 Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   - 2.2 En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   - 2.3 Calculer $\sum_{k=0}^{4} v_k$.