Chapitre 1 : Intégration

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Intégrale d'une fonction
   - 1.1 Définition
   - 1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
     - Aire d'une fonction positive
     - Aire d'une fonction négative
     - Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
     - Méthode des rectangles
2. Propriétés de l'intégrale
   - 2.1 Relation de Chasles
   - 2.2 Linéarité
   - 2.3 Inégalités
   - 2.4 Valeur moyenne
3. Exercice bilan

Intégrale d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Définition 1.

On appelle **intégrale** de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque 1.

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u$$

Exercice 1:

Calculer l'intégrale $\int_2^3 x \, \mathrm{d}x$.

Intégrale d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

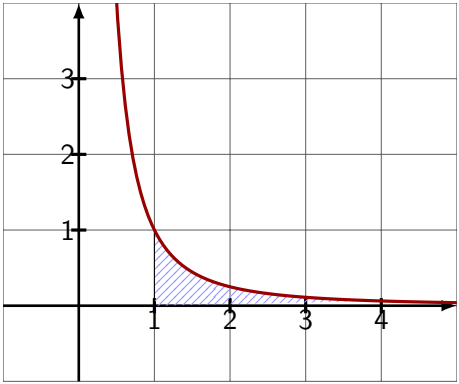
3. Exercice bilan

Définition 2.

Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice 2:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^2}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.



Intégrale d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

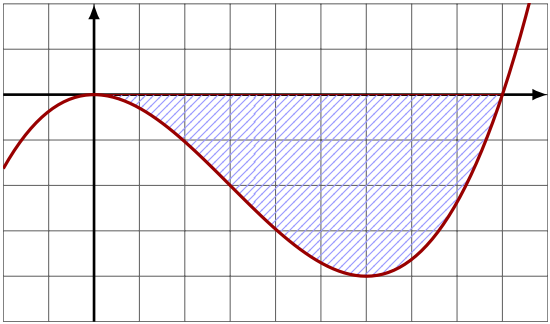
3. Exercice bilan

Définition 3.

Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice 3:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$.



Intégrale d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

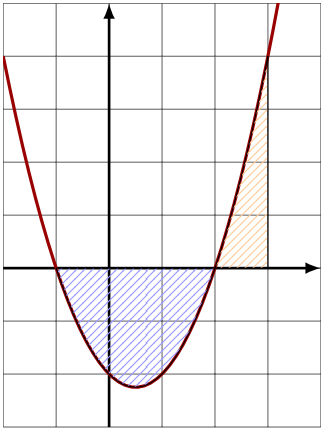
2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

Exercice 4:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

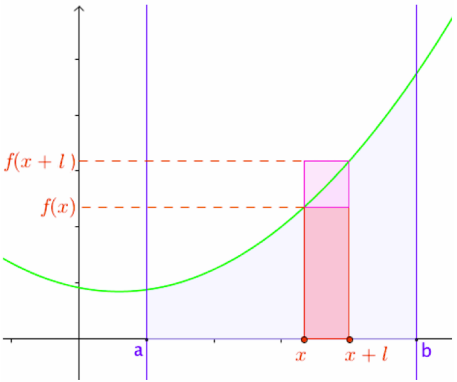


Intégrale d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
Méthode des rectangles
2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne
3. Exercice bilan

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a; b]$.
On partage l'intervalle $[a; b]$ en n sous intervalles de même amplitude $\ell = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x; x+\ell]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimensions ℓ et $f(x)$ d'aire $\ell \times f(x)$;
- l'autre de dimensions ℓ et $f(x+\ell)$ d'aire $\ell \times f(x+\ell)$.



Sur l'intervalle $[a; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs". Voici un algorithme écrit en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

```
1  def integrale(f,a,b,n):
2      longueur = (b - a) / n
3      aire_inf , aire_sup = 0 , 0
4      for k in range (n):
5          aire_inf = aire_inf + longueur *
6                      f(a + k * longueur )
7          aire_sup = aire_sup + longueur *
8                      f(a + (k+1) * longueur )
9      return aire_inf , aire_sup
10
11 aire_inf , aire_sup = integrale(lambda x: x*x ,0,1,100)
12 print("{} < integrale < {}".format(aire_inf,aire_sup))
```

Propriétés de l'intégrale

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Propriété 1. *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in [1;4] \end{cases}$.

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Propriété 2.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x)+x\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Propriété 3.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ alors on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Propriété 4.

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés de l'intégrale

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
      Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Définition 4.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ non trivial. On appelle **valeur moyenne** de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 7:

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1; 0]$.

Exercice bilan

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire
Méthode des rectangles

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Exercice bilan

Soit f définie pour tout $x \in [-\pi; \pi]$ par $f(x) = \sin(4x + \pi)$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[-\pi; \pi]$.