Chapitre 2 : Fonction exponentielle

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

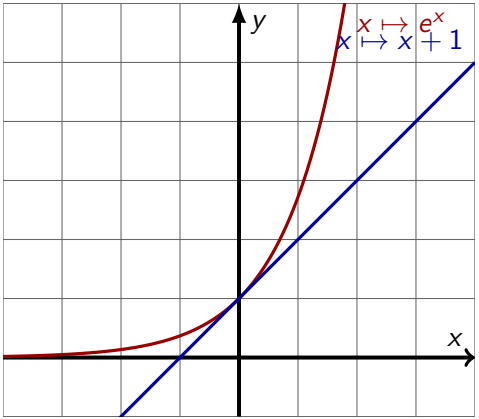
Définition et caractérisation

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   2.1 Dérivation
   2.2 Limites aux bornes
   2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   4.1 Dérivation
   4.2 Primitivation
   4.3 Limites aux bornes
   4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Définition et caractérisation

Propriété 1.

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0;1)$ a pour coefficient directeur 1.



Définition et caractérisation

Définition 1.

Cette fonction est la **fonction exponentielle** de base e, notée exp, définie par $\exp(x) = e^x$.
Le réel e est environ égal à $2,718$.

Remarque 1.

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   2.1 Dérivation
   2.2 Limites aux bornes
   2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   4.1 Dérivation
   4.2 Primitivation
   4.3 Limites aux bornes
   4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 2.

Soit f la fonction exponentielle. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = e^x$$

Exercice 1:

Pour $x \in \mathbb{R}$, dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f(x) = xe^x$
- $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

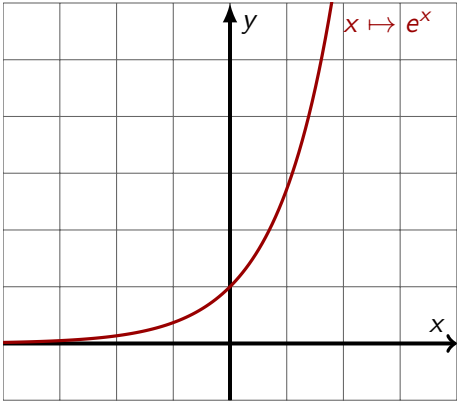
Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 3.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

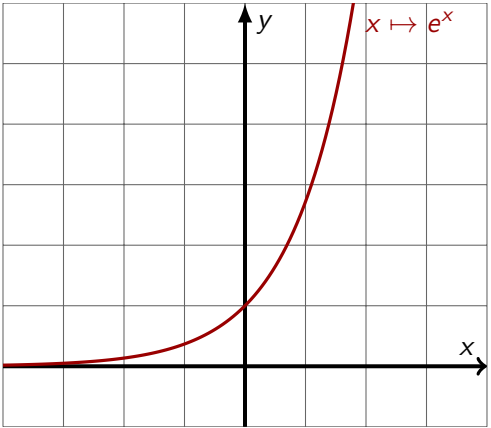


Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 4.

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Relations fonctionnelles

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Relations fonctionnelles

Propriété 5.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Remarque 2.

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice 2:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \dfrac{e^{-3}}{e^2}$
- $C(x) = (e^{3x})^2$
- $D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Relations fonctionnelles

Propriété 6.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice 3:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^{x+2} = e^6$
- $e^{2x-5} < e^{x-2}$

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 7.

La fonction $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = ke^{kx}$$

Remarque 3.

La dérivée de $f(x) = e^{-x}$ est donc $f'(x) = -e^{-x}$.

Exercice 4:

Soit la fonction $f(x) = xe^{-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Etudier les variations de f.

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 8.

La fonction $f(x) = e^{kx}$ admet une primitive F :

$$F(x) = \frac{e^{kx}}{k}$$

Exercice 5:

Soit la fonction $f(x) = e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

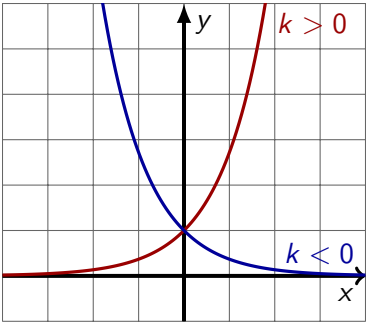
1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 9.

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{si} \quad k > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{si} \quad k < 0$$

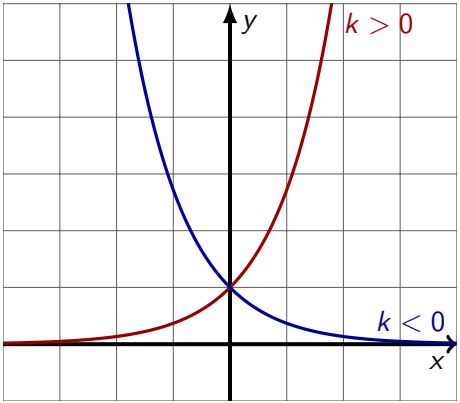


Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   - 2.1 Dérivation
   - 2.2 Limites aux bornes
   - 2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   - 4.1 Dérivation
   - 4.2 Primitivation
   - 4.3 Limites aux bornes
   - 4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété 10.

- Si $k > 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.



Croissances comparées

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   2.1 Dérivation
   2.2 Limites aux bornes
   2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   4.1 Dérivation
   4.2 Primitivation
   4.3 Limites aux bornes
   4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

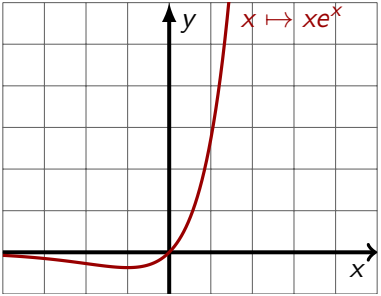
Croissances comparées

Propriété 11.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour n entier.

Remarque 4.

La propriété précédente signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus lente que $x \mapsto e^x$.



Exercice bilan

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
   2.1 Dérivation
   2.2 Limites aux bornes
   2.3 Signe et variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
   4.1 Dérivation
   4.2 Primitivation
   4.3 Limites aux bornes
   4.4 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Exercice bilan

Soit $f(t) = -14e^{-\frac{1}{90}t} + 21$.

1. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(t)$, etablir son tableau de signe puis le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{90} f(t)\,\mathrm{d}t$.