Chapitre 3 : Équations différentielles

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition et introduction

2. Résolution de l'EDO $y' = ay$

3. Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

4. Exercice bilan

Définition et introduction

1. Définition et introduction

2. Résolution de l'EDO $y' = ay$

3. Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

4. Exercice bilan

Définition et introduction

Définition 1.

Une **équation différentielle** (EDO) est une égalité liant une fonction inconnue (souvent notée y), ses dérivées et éventuellement d'autres fonctions. L'inconnue recherchée est donc une **fonction**.

Exemple 1:

Résoudre $y' - y = 0$, signifie trouver toutes les **fonctions** y telles que $y'(x) - y(x) = 0$ quelque que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1:

Vérifier que la fonction $f : x \mapsto e^x$ est une solution de cette équation.

Définition et introduction

Exercice 2:

1. On considère l'équation différentielle $y' = 2y$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ est une solution de cette équation différentielle.
2. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est-elle une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$?
3. On considère l'équation différentielle $2y' + y = h$, où $h : x \mapsto 3x^2 - 7x + 9$. La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$ est-elle une solution de cette équation différentielle ?

Résolution de l'EDO $y' = ay$

1. Définition et introduction

2. Résolution de l'EDO $y' = ay$

3. Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

4. Exercice bilan

Résolution de l'EDO $y' = ay$

Définition 2.

L'équation :

$$(E_0) : \qquad y' = ay$$

est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Exemple 2:

- $y' = 5y$
- $2y' + 9y = 0$

Résolution de l'EDO $y' = ay$

Théorème 1.

- Les solutions de (E_0) sont données par les fonctions :

$$y : x \mapsto Ce^{ax} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E_0) sachant que $y(x_0) = y_0$.

Remarque

Le deuxième point définit une condition initiale. Sans cette condition initiale, il n'y a pas unicité de la solution.

Résolution de l'EDO $y' = ay$

Exercice 3:
On considère l'équation différentielle $2y' + 9y = 0$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = 1$.

Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

1. Définition et introduction

2. Résolution de l'EDO $y' = ay$

3. Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

4. Exercice bilan

Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

Définition 3.

L'équation :

$$(E) : \qquad y' = ay + b$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

Théorème 2.

Les solutions de (E) sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 4:

On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 2$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = -\frac{1}{3}$

Exercice bilan

1. Définition et introduction

2. Résolution de l'EDO $y' = ay$

3. Résolution de l'EDO $y' = ay + b$

4. Exercice bilan

Exercice bilan

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{90}y + \frac{7}{30}$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 7$.