Chapitre 4 : Fonction logarithme

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   - 2.1 Définition
   - 2.2 Dérivation
   - 2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Logarithme népérien

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   2.1 Définition
   2.2 Dérivation
   2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Logarithme népérien

Définition 1.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a:

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Remarque 1

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas.

Logarithme népérien

Propriété 1.

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Exemple 1:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice 1:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

Etude de la fonction logarithme

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   2.1 Définition
   2.2 Dérivation
   2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Définition 2.

On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\ln : x \mapsto \ln(x)$$

Remarque 2

Dans le tronc commun, nous avons étudier la fonction logarithme décimal qui a un lien très étroit avec la fonction logarithme népérien. En effet, on a pour tout réel x strictement positif :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Etude de la fonction logarithme

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   - 2.1 Définition
   - 2.2 Dérivation
   - 2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Propriété 2.

La fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Exercice 2:

Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$.

Etude de la fonction logarithme

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   - 2.1 Définition
   - 2.2 Dérivation
   - 2.3 Limites et variations

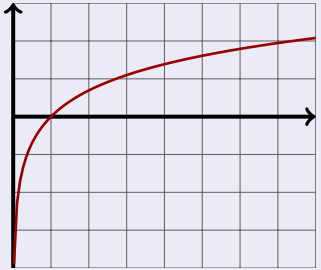
3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Propriété 3.

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



Relations fonctionnelles

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   - 2.1 Définition
   - 2.2 Dérivation
   - 2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Relations fonctionnelles

Propriété 4.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriété 5.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Exercice 3:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$
- $B = \ln(32) - 7\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

Relations fonctionnelles

Propriété 6.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Exercice 4:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $\ln(x + 2) = 6$
- $\ln(1 + 5x) - 6 < 0$

Croissances comparées

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   2.1 Définition
   2.2 Dérivation
   2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Croissances comparées

Théorème 1. *Croissances comparées*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Remarque 3

Le théorème précédent signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus rapide que $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice bilan

1. Logarithme népérien

2. Etude de la fonction logarithme
   2.1 Définition
   2.2 Dérivation
   2.3 Limites et variations

3. Relations fonctionnelles

4. Croissances comparées

5. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Résoudre l'équation $148 - 10\ln(x) = 136 - 7,5\ln(x)$.
2. Simplifier l'expression $3\ln(2x) - \ln(8)$.
3. Résoudre l'équation $480e^{-\frac{1}{95}t} + 20 = 280$.