Chapitre 5 : Composition de fonctions

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Définition

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Définition

Définition 1.

On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Exemple 1:

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x-3}$. C'est la composée de deux fonctions u et v :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

On a $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et donc f :

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x-3) = \sqrt{x-3}$$

Définition

Exercice 1:
Soient $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Déterminer l'expression des fonctions $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Puissance	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Exercice 2:
Soit $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f.

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Propriété 1.

On a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

.

Exercice 3:

Déterminer la fonction dérivée de $g(x) = (3x + 2)^3$.

Primitivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif des primitives des fonctions usuelles :

	Fonction f	**Primitive** F
Constante	$f(x) = a$	$F(x) = ax$
Puissance	$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
Sinusoïde	$f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$	$F(x) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega x + \phi)$

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Primitive**
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$ où F est une primitive de f.
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Primitivation de fonctions composées

Exercice 4:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$
- $g(x) = xe^{x^2}$
- $h(x) = -3\sin(3x - 1)$

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées
   2.1 Cas particuliers
   2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Exercice bilan

Exercice bilan

Soit $f(x) = (2x - 6)(x^2 - 6x + 7)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.