Chapitre 6 : Nombres complexes (forme exponentielle)

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Rappels
   - 1.1 Forme algébrique
   - 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   - 1.3 Module d'un nombre complexe
   - 1.4 Arugment d'un nombre complexe
   - 1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   - 2.1 Définition
   - 2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   - 3.1 Formules d'addition
   - 3.2 Formules de duplication
   - 3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Rappels

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 1.

On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture :

$$z = a + ib$$

avec a, b deux réels.

Exemple 1:

- $z_1 = 4 + 5i$
- $z_2 = -2i$
- $z_3 = -4$

Rappels

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 2.

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe:

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 2:

Le conjugué de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ est $\overline{z_1} = \frac{1}{2} + 3i$.

Rappels

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 3.

Soit $z = a + ib$. On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple 3:

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$
- $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

Rappels

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 4.

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, un **argument** de z est un nombre réel, noté $\arg(z)$ ou θ, tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple 4:

- $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arg(-1) = \pi$
- $\arg(2) = 0$

Rappels

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 5.

Soit z un nombre complexe non nul dont on note le module $|z|$ et un argument θ, une **écriture trigonométrique** de z est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Exercice 1:

- Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - i$.
- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Forme exponentielle

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Définition 6.

Pour tout réel θ on a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exemple 5:

- $e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Définition 7.

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta}$$

Exercice 2:

1. Ecrire $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ sous forme exponentielle.
2. Ecrire $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.

Forme exponentielle

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Propriété 1.

Soient θ et θ' deux réels :

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exercice 3:

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

2.1 iz 2.2 $i\bar{z}$ 2.3 $-\dfrac{2i}{z}$

Formules de trigonométrie

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Propriété 2.

Soient a, b deux réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Remarque 1.

En remplaçant b par $-b$ précédemment et on obtient :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Exercice 4:
Soit $f(t) = \sqrt{3}\cos(3t) + \sin(3t)$, écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = A\cos(3t + \phi)$ avec A et ϕ à déterminer.

Exercice 5:
Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

Formules de trigonométrie

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Propriété 3.

Soit a un réel, on a:

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Exercice 6:
Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.

Formules de trigonométrie

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Propriété 4.

Soit a un réel, on a:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$$

Exercice 7:

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$. La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
On retrouve les transformations du plan usuelles dans le tableau ci-dessous :

Transformation	**Définition**	**Fonction associée**
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$
Homothétie de centre O de rapport a	$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$
Rotation de centre O d'angle θ	$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta}z$

Transformations

Exercice 8:
Soient f, g, h définies par :

- $f(z) = (1-i)(1+i)z$
- $g(z) = z - 2i$
- $h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}}z$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction. On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

Exercice bilan

1. Rappels
   1.1 Forme algébrique
   1.2 Conjugué d'un nombre complexe
   1.3 Module d'un nombre complexe
   1.4 Arugment d'un nombre complexe
   1.5 Forme trigonométrique
2. Forme exponentielle
   2.1 Définition
   2.2 Propriétés
3. Formules de trigonométrie
   3.1 Formules d'addition
   3.2 Formules de duplication
   3.3 Formules de linéarisation
4. Transformations
5. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3} - i$.
2. Soit $f(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$.
   Déterminer A et ϕ tels que $f(t) = A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t + \phi\right)$.