# Chapitre 1 : Trigonométrie

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

# Table des matières

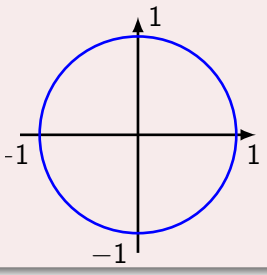

1. Cercle trigonométrique et radians
   - 1.1 Le cercle trigonométrique
   - 1.2 Enroulement d'une droite
   - 1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   - 2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   - 2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   - 3.1 Valeurs remarquables
   - 3.2 Fonctions cosinus et sinus
     - 3.2.1 Représentation graphique
     - 3.2.2 Parité
   - 3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

Cercle trigonométrique et radians

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Définition 1.**

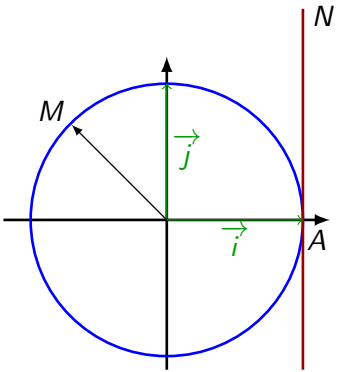
Sur un cercle, on appelle **sens trigonométrique** (ou sens direct) le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O$ et de rayon 1.



Cercle trigonométrique et radians

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite $(AN)$ tangente au cercle en $A$. Si on "enroule" la droite autour du cercle, on associe à tout point $N$ d'abscisse $x$ de la droite orientée un unique point $M$ du cercle. La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur $AN$.



Cercle trigonométrique et radians

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Propriété 1.**

La longueur du cercle trigonométrique est égale à $2\pi$.

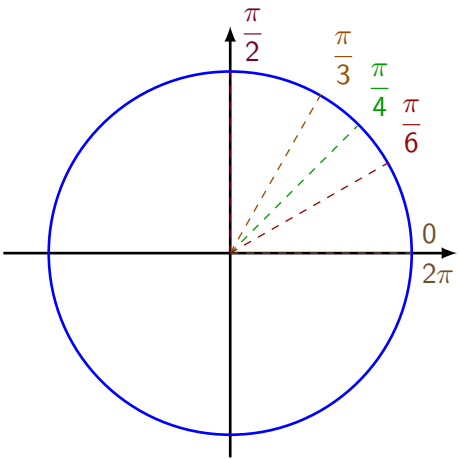
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel $2\pi$. On définit alors un nouvelle unité d'angle: le radian, défini tel qu'un tour complet mesure $360°$ ou $2\pi$ radians.

Ainsi, à $2\pi$ radians (un tour complet), on peut faire correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes:

| **Angle en degré** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Angle en radian** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |

**Exercice 1:**
Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° puis donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

On représente par exemple ci-dessous des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique :



Mesure d'un angle orienté

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Définition 2.**

Une **mesure**, en radians, de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est la longueur de chemin parcouru pour aller de $A$ à $M$ dans le sens direct.

**Propriété 2.**

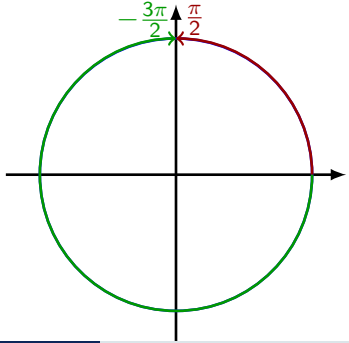
Si $\alpha$ est une mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ où $k$ est un nombre entier relatif.

**Remarque 1.**

Le "$k$" détermine en fait un nombre de tours que l'on effectue sans le sens direct si $k$ est positif, et dans le sens indirect si $k$ est négatif.

Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droit, soit 90°. Il est également possible de faire la lecture dans l'autre sens (sens indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$.

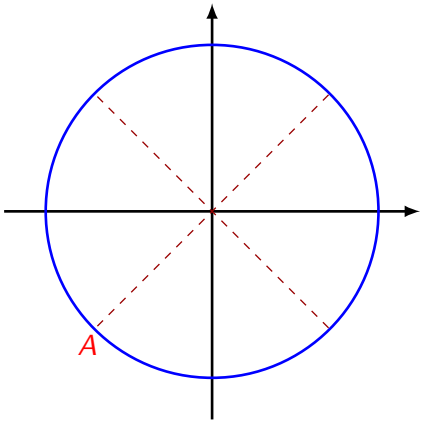
Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle (sans pour autant que ces mesures soient égales !)



**Exercice 3:**

Lire sur le cercle trigonométrique l'angle associé au point $A$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point $B$ associé à l'angle $\dfrac{9\pi}{4}$ et le point $C$ associé à l'angle $-\dfrac{9\pi}{2}$.



Mesure d'un angle orienté

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Définition 3.**

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

**Exemple 1:**

Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$. D'autres mesures sont données par exemple par :

$$\frac{7\pi}{4}-2\pi=-\frac{\pi}{4}\quad,\quad \frac{7\pi}{4}-4\pi=-\frac{9\pi}{4}\quad,\quad \frac{7\pi}{4}-6\pi=-\frac{17\pi}{4}\quad,\quad \ldots$$

$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car la seule comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

**Exercice 4:**

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

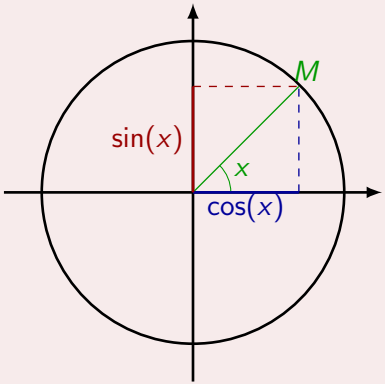
Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

Cosinus et sinus d'un nombre réel

**Définition 4.**

Soit $M$ le point du cercle trigonométrique associé au nombre $x$ (qui est un angle orienté). Le point $M$ a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$.



Cosinus et sinus d'un nombre réel

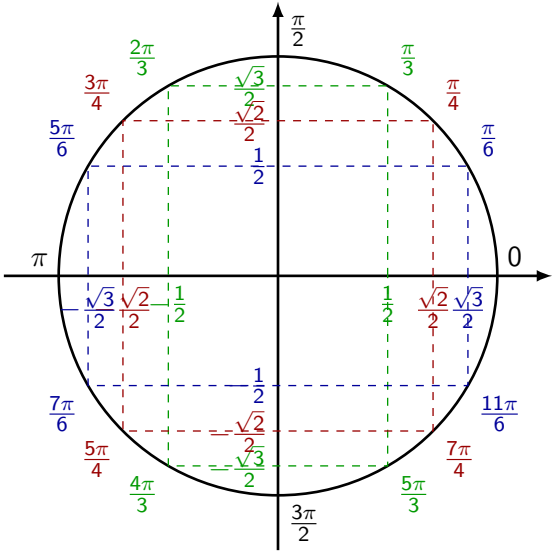
**Propriété 3.**

Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x) \in [-1; 1]$
- $\sin(x) \in [-1; 1]$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Cercle trigonométrique et radians
1.1 Le cercle trigonométrique
1.2 Enroulement d'une droite
1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
3.1 Valeurs remarquables
3.2 Fonctions cosinus et sinus
3.2.1 Représentation graphique
3.2.2 Parité
3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\pi$
0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$

D'après ce cercle trigonométrique, on peut déterminer quelques valeurs utiles :

| $\mathbf{x}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\mathbf{x})$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(\mathbf{x})$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Exercice 5:**

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

**Exercice 6:**

Résoudre les équations suivantes :

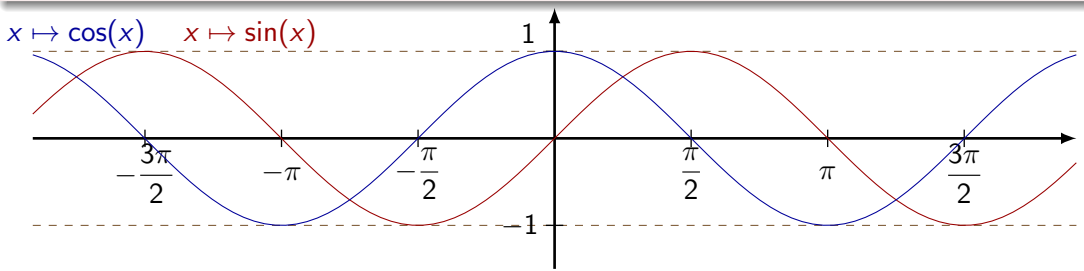
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0; 2\pi]$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}, x \in [-\pi; \pi]$

Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Définition 5.**

- La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction **sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.



D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

**Propriété 4.**

$$\forall (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

On dira alors que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2\pi$, ou encore simplement $2\pi$-périodiques.

Cela signifie que l'on retrouve la même "parcelle de courbe" sur chaque intervalle de longueur $2\pi$.

Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Cercle trigonométrique et radians
1.1 Le cercle trigonométrique
1.2 Enroulement d'une droite
1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
3.1 Valeurs remarquables
3.2 Fonctions cosinus et sinus
3.2.1 Représentation graphique
3.2.2 Parité
3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

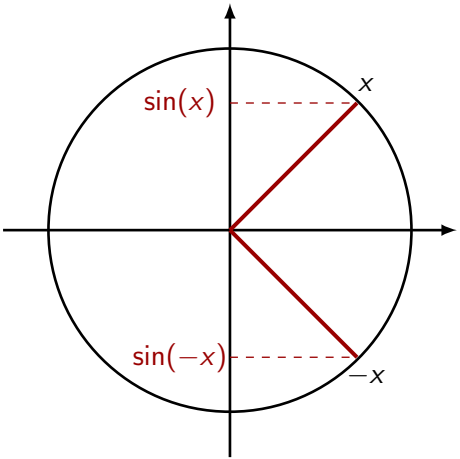
Toujours par construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on a que :

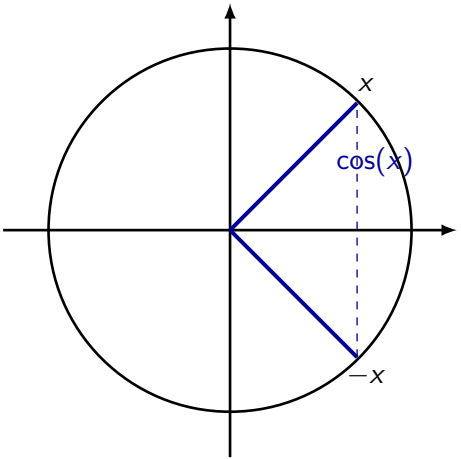
**Propriété 5.**

- La fonction cosinus est paire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.

**Exercice 7:**
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

Ceci signifie que la fonction cosinus est paire (elle admet une symétrie d'axe l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre se symétrie).



Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

**Définition 6.**

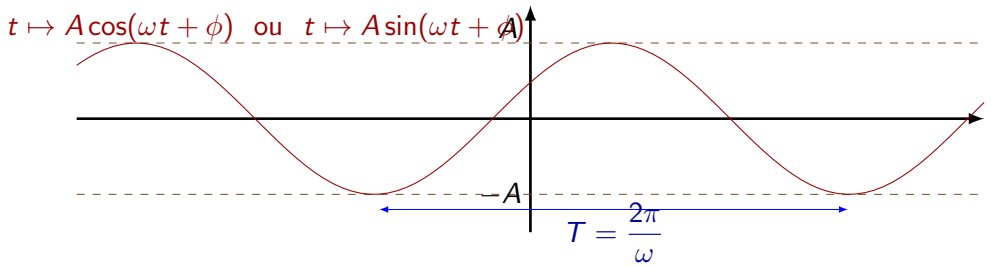
Une fonction sinusoïdale a une expression de la forme :

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$$

- $A$ est un réel positif qui représente **l'amplitude** du signal, c'est-à-dire la valeur maximale prise par la fonction.
- $(\omega t + \phi)$ est la phase instantanée avec :
  - $\omega$ : la **pulsation**, un réel qui s'exprime en radians par secondes.
  - $\phi$ : un réel s'exprime en radians qui représente la **phase à l'origine**, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

**Propriété 6.**

- Les fonctions sinusoïdales sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, exprimé en secondes.
- La fréquence, qui correspond au nombre de périodes par unité de temps est $f = \dfrac{1}{T}$, elle s'exprime en Herz (Hz).
- La fréquence, la pulsation et la période sont liées par : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$




**Exercice 8:**

Déterminer l'amplitude, la phase à l'origine, la pulsation et la période de la fonction sinusoïdale donnée par

$$f(t) = 2\cos\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice bilan

1. Cercle trigonométrique et radians
   1.1 Le cercle trigonométrique
   1.2 Enroulement d'une droite
   1.3 Le radian
2. Mesure d'un angle orienté
   2.1 Lire sur le cercle trigonométrique
   2.2 Mesure principale d'un angle orienté
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel
   3.1 Valeurs remarquables
   3.2 Fonctions cosinus et sinus
      3.2.1 Représentation graphique
      3.2.2 Parité
   3.3 Fonctions sinusoïdales
4. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Donner la mesure principale de $\frac{95\pi}{17}$.
2. Placer le point $A$ sur le cercle trigonométrique associé à l'angle $\frac{7\pi}{4}$.

   En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.
3. Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.