Chapitre 3 : Produit scalaire

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   - 2.1 Aspect trigonométrique
   - 2.2 Aspect projectif
   - 2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Rappels sur les vecteurs

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Rappels sur les vecteurs

Définition 1.

On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ associé à une translation, un segment orienté caractérisé par:

- Sa **direction** (orientation de la droite).
- Son **sens** (direction de la flèche).
- Sa **norme** (longueur du segment noté $||\overrightarrow{u}||$).

Propriété 1. *Relation de Chasles*

Soient A,B et C trois points quelconques du plan, on a la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Rappels sur les vecteurs

Propriété 2.

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ =point d'arrivée - point de départ

Propriété 3.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :
La norme du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définitions et caractérisations

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

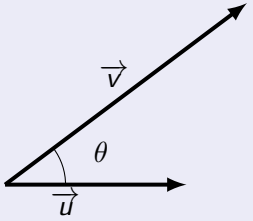
3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Propriété 4.

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\theta)$$



Exemple 1:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

Propriété 5.

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple 2:

Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.
On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 2 \times 5 = 10 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -AD \times CB = -6 \times 3 = -18$$

Propriété 6.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k, on a :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
- $$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
- $$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Remarque 1.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Définition 2.

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice 1:

On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$ et $[DA]$.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OI}$

Définitions et caractérisations

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

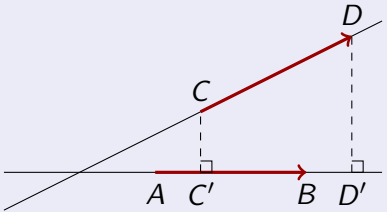
3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Propriété 7.

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB), alors :

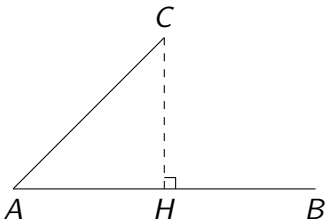
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

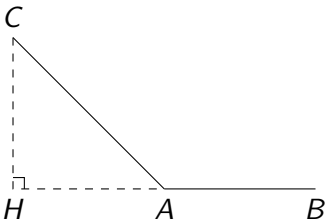
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



Définitions et caractérisations

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Propriété 8.

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice 2:

Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Théorème d'Al-Kashi

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

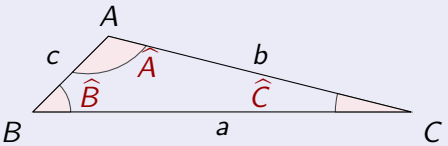
Théorème d'Al-Kashi

Théorème 1.

Soit ABC un triangle quelconque.

On note :

$$\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$$



Alors :

$$\begin{cases} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Exemple 3:
Dans un triangle KLM, on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$$

A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.

Exercice 3:
Dans un triangle ABC, on a $AB = 6, BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer AC.

Exercice bilan

1. Rappels sur les vecteurs

2. Définitions et caractérisations
   2.1 Aspect trigonométrique
   2.2 Aspect projectif
   2.3 Aspect analytique

3. Théorème d'Al-Kashi

4. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4.
   Calculer :

   1.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 1.2 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

2. Déterminer la valeur de m tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.