Chapitre 4 : Nombres complexes (forme trigonométrique)

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

3. Forme trigonométrique

4. Exercice bilan

Représentation graphique

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

3. Forme trigonométrique

4. Exercice bilan

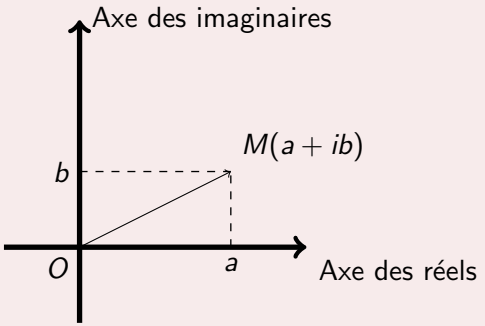
Représentation graphique

Définition 1.

Le **plan complexe** est le plan où l'axe des abscisses est l'axe réel et l'axe des ordonnées est l'axe imaginaire. A un nombre complexe $z = a + ib$ on associe :

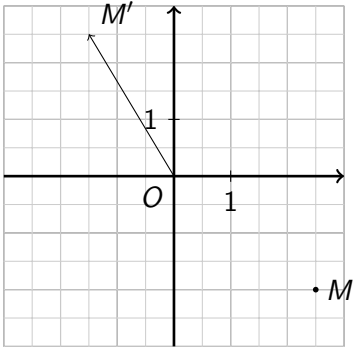
- Un point image $M(a; b)$
- Un vecteur image $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On dira que z est **l'affixe** de M et de $\overrightarrow{OM}$.



Représentation graphique

Exercice 1:
Donner l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ ci-dessous puis placer le point M'' d'affixe $z = -2 - i$:



Représentation graphique

Propriété 1.

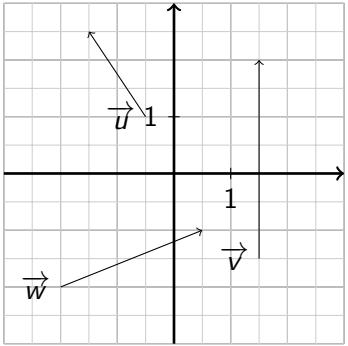
Soit A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B.

- Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Représentation graphique

Exercice 2:

Déterminer l'affixe des vecteurs ci-dessous :



Exercice 3:

Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + 2i$ et B le point d'affixe $z_B = -3 + i$.

Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$ puis l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Module et argument

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

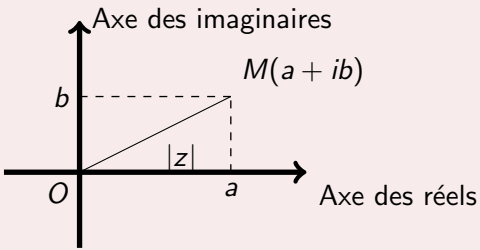
3. Forme trigonométrique

4. Exercice bilan

Définition 2.

Soit M le point d'affixe $z = a + ib$. On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Exemple 1:

- $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$
- $|-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$

Remarque 1.

- Le module d'un nombre complexe est toujours un nombre positif.
- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

Propriété 2.

Soient A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B. On a $AB = |z_B - z_A|$.

Propriété 3.

Soient z, z' deux nombres complexes. On a :

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

Exercice 4:

Calculer le module des nombres complexes suivant :

- $2 + 3i$
- $7i$
- $-3i(4 - 3i)$
- $\frac{1+i}{2-3i}$

Module et argument

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

3. Forme trigonométrique

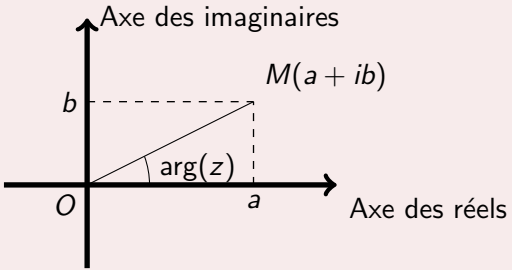
4. Exercice bilan

Définition 3.

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, un **argument** de z est un nombre réel, noté $\arg(z)$ ou θ, tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Si $M(a; b)$ est un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$, $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque 2.

Le nombre complexe nul est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument. Les autres nombres complexes ont une infinité d'arguments, définis à un multiple de 2π près.

Exemple 2:

- $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arg(-1) = \pi$
- $\arg(2) = 0$

Forme trigonométrique

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

3. Forme trigonométrique

4. Exercice bilan

Forme trigonométrique

Définition 4.

Soit z un nombre complexe non nul dont on note le module $|z|$ et un argument θ, une écriture **trigonométrique** de z est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Exercice bilan

1. Représentation graphique

2. Module et argument
   2.1 Module d'un nombre complexe
   2.2 Argument d'un nombre complexe

3. Forme trigonométrique

4. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - i$.
2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$