Chapitre 5 : Dérivation

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

Point de vue local

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

Définition 1.

Soit y une fonction de x, c'est-à-dire $y = f(x)$.

- Si x subit une variation notée Δx autour d'une valeur x_0, alors y subit une variation notée Δy.
- Le **taux de variation** entre le point d'abscisse x_0 et le point d'abscisse $x_0 + \Delta x$ est noté $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$.
- Lorsque Δx tend vers 0, on aura alors l'expression du taux d'accroissement et du nombre dérivé au point d'abscisse x_0 donné par :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0)$$

Point de vue local

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

Définition 2.

Soit T la **tangente** à la courbe représentative d'une fonction au point d'abscisse x_0. On a donc :

$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si x est proche de x_0, on peut écrire :

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si on pose $x = x_0 + h$, avec h proche de 0, on peut écrire :

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \times h$$

On dira que c'est l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ pour h proche de 0.

Point de vue global

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

En plus des fonctions polynômiales étudiées dans le tronc commun, on peut dériver d'autres types de fonction suivant le tableau ci-dessous :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Linéaire	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Puissance	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exercice 1:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f(x) = 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h(x) = \dfrac{2}{x}$
- $p(x) = -\cos x$

Point de vue global

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

Propriété 1.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- Somme : $(u+v)' = u' + v'$;
- Produit par un scalaire : $(ku)' = ku'$;
- Produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$;
- Inverse : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$;
- Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 2:

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité:

- $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)(5x^3 - 2)$
- $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Propriété 2.

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b des réels quelconques. Alors, la fonction f, définie par $f(x) = g(ax + b)$, est dérivable sur I:

$$\forall x \in I, f'(x) = a \times g(ax + b)$$

.

Exemple 1:

Soit $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$, on a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f'(t) = \omega \times (-\sin(\omega t + \phi))$.

Exercice 3:
Dériver les fonctions suivantes sur leur intervalle de dérivabilité :

- $f(x) = (2x+1)^2$
- $g(x) = -2\sin\left(5x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

Remarque 1.

La dérivée permet de déterminer les variations d'une fonction quel que soit le cas (même quand sa forme n'est pas simple).

Exercice bilan

1. Point de vue local
   1.1 Nombre dérivé et notations
   1.2 Approximation affine

2. Point de vue global
   2.1 Fonction dérivée
   2.2 Opérations sur les dérivées

3. Exercice bilan

Exercice bilan

Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle I :

$$f(x) = \frac{3x}{4x-6} \quad \text{sur} \quad I =]-3;2]$$