Chapitre 2 : Nombres complexes (forme algébrique)

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Notion de nombre complexe

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Notion de nombre complexe

Définition 1.

Un nombre z est dit **complexe** s'il s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où :

- i est un nombre dit **imaginaire** définit par $i^2 = -1$.
- a est un nombre réel : c'est la **partie réelle** de z.
- b est un nombre réel : c'est la **partie imaginaire** de z.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Remarque

Tous les nombres réels sont des nombres complexes, en effet $z = 8$ s'écrit également $z = 8 + 0i$.
On a donc l'inclusion d'ensembles :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Notion de nombre complexe

Exercice 1:
Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5 + 3i$
- $z_2 = 1,5 + 3,3i$
- $z_3 = \frac{3}{4}i + 5$
- $z_4 = -i$

Notion de nombre complexe

Remarque

En physique, on note j le nombre complexe i pour éviter la confusion avec la notation du courant électrique.

Opérations de nombres complexes

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Propriété 1.

Sur l'ensemble $\mathbb{C}$, les propriétés de calculs entre deux nombres sont les mêmes que sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple 1:

- $(3+4i)+(7+5i) = 3+4i+7+5i = 10+9i$
- $(3+4i)-(7+5i) = 3+4i-7-5i = -4-i$
- $(3+4i)\times(7+5i) = 3\times 7+3\times 5i+4i\times 7+4i\times 5i = 21+15i+28i+20i^2 = 1+43i$

Exercice 2:

Calculer l'addition, la soustraction et la multiplication de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ par $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

Opérations de nombres complexes

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Définition 2.

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe:

$$\overline{z} = a - ib$$

Exercice 3:

Déterminer le conjugué des nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ et $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

Propriété 2.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on a $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

Méthode 1.

Soit z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. Pour déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\overline{z_2}$ du dénominateur.

Exemple 2:

$$\frac{2+3i}{1+3i} = \frac{(2+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i+3i-9i^2}{1^2+3^2} = \frac{11-3i}{10} = 1,1-0,3i.$$

Exercice 4:

Exprimer les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique :

- $\dfrac{1+2i}{1+i}$
- $\dfrac{1}{i}$

Propriété 3.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Exemple 3:

- $\overline{(3+4i)+(7+5i)} = \overline{3+4i} + \overline{7+5i} = 3-4i+7-5i = 10-9i$
- $\overline{(3+4i)\times(7+5i)} = \overline{3+4i} \times \overline{7+5i} = (3-4i)\times(7-5i) = 21-15i-28i+20i^2 = 1-43i$

Équations de nombres complexes

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Équations de nombres complexes

Méthode 2.

De même que pour les équations "classiques" dans $\mathbb{R}$, pour résoudre une équation dans $\mathbb{C}$, on "rassemble" les termes de même degré ensemble du même côté de l'égalité.

Remarque 1.

Les solutions d'équations dans $\mathbb{C}$ seront donc des nombres complexes qui devront être exprimés sous forme algébrique.

Exercice 5:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$2 - 5i + 4z = 1 - i$$

Exercice bilan

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations de nombres complexes
   2.1 Addition et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Équations de nombres complexes

4. Exercice bilan

Exercice bilan

1. Soient $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2 - \sqrt{5}i$. Calculer :

   1.1 $z_1 - z_3$ 1.2 z_2^2

2. Donner la forme algébrique de $z_3 = \dfrac{3 - i}{1 + 2i}$.
3. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{C}$:

$$5z + 8 - 3i = 3 - 4i$$