Chapitre 2 : Nombres complexes (forme algébrique)

Table des matières

Chapitre 2 : Nombres complexes (forme algébrique) 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Notion de nombre complexe 3
2 Opération entre nombres complexes 3
2.1 Addition, soustraction et multiplication 3
2.2 Conjugaison et opérations 4
3 Équations de nombres complexes 5
4 Exercice bilan 5

Contenu

- définition, conjugué ;
- somme, produit, quotient ;
- conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

1 Notion de nombre complexe

Définition 1.
Un nombre z est dit **complexe** s'il s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où :

- i est un nombre dit **imaginaire** définit par $i^2 = -1$.
- a est un nombre réel : c'est la **partie réelle** de z.
- b est un nombre réel : c'est la **partie imaginaire** de z.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Remarque 1.
Tous les nombres réels sont des nombres complexes, en effet $z = 8$ s'écrit également $z = 8 + 0i$.
On a donc l'inclusion d'ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Remarque 2.
En physique, on note j le nombre complexe i pour éviter la confusion avec la notation du courant électrique.

Exercice 1:
Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5 + 3i$
- $z_2 = 1,5 + 3,3i$
- $z_3 = \frac{3}{4}i + 5$
- $z_4 = -i$

2 Opération entre nombres complexes

2.1 Addition, soustraction et multiplication

Propriété 1.
Sur l'ensemble $\mathbb{C}$, les propriétés de calculs entre deux nombres sont les mêmes que sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple 1:

- $(3 + 4i) + (7 + 5i) = 3 + 4i + 7 + 5i = 10 + 9i$
- $(3 + 4i) - (7 + 5i) = 3 + 4i - 7 - 5i = -4 - i$
- $(3 + 4i) \times (7 + 5i) = 3 \times 7 + 3 \times 5i + 4i \times 7 + 4i \times 5i = 21 + 15i + 28i + 20i^2 = 1 + 43i$

Exercice 2:
Calculer l'addition, la soustraction et la multiplication de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ par $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

2.2 Conjugaison et opérations

Définition 2.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exercice 3:
Déterminer le conjugué des nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ et $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

Propriété 2.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on a $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

Méthode 1.
Soit z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\overline{z_2}$ du dénominateur.

Exemple 2:
$\frac{2+3i}{1+3i} = \frac{(2+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i+3i-9i^2}{1^2+3^2} = \frac{11-3i}{10} = 1,1-0,3i.$

Exercice 4:
Exprimer les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique :

- $\frac{1+2i}{1+i}$
- $\frac{1}{i}$

Propriété 3.
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Exemple 3:

- $\overline{(3+4i)+(7+5i)} = \overline{3+4i} + \overline{7+5i} = 3-4i+7-5i = 10-9i$
- $(3+4i) \times (7+5i) = \overline{3+4i} \times \overline{7+5i} = (3-4i) \times (7-5i) = 21-15i-28i+20i^2 = 1-43i$

3 Équations de nombres complexes

Méthode 2.
De même que pour les équations "classiques" dans $\mathbb{R}$, pour résoudre une équation dans $\mathbb{C}$, on "rassemble" les termes de même degré ensemble du même côté de l'égalité.

Remarque 3.
Les solutions d'équations dans $\mathbb{C}$ seront donc des nombres complexes qui devront être exprimés sous forme algébrique.

Exercice 5:
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$2 - 5i + 4z = 1 - i$$

4 Exercice bilan

1. Soient $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2 - \sqrt{5}i$. Calculer :

   a. $z_1 - z_3$ b. z_2^2

2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

   a. $z_1 = \dfrac{3 - i}{1 + 2i}$ b. $z_2 = \dfrac{5 - 2i}{2 + 5i}$

3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

   a. $5z + 8 - 3i = 3 - 4i$ b. $(3 - i)z - 1 = -2 + 3i$